

PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND 51.

1. *Ueber Kathodenstrahlen in Gasen von atmosphärischem Druck und im äussersten Vacuum; von Philipp Lenard.*

(Hierzu Taf. IV Fig. 1–12.¹⁾)

1. Wird ein Geissler'sches Rohr genügend weit evacuirt, so treten fast alle Erscheinungen zurück, welche sich an die Anode schliessen und welche die Bahn der electrischen Entladung bezeichnen, und es kommen dafür die phosphorescenzerregenden Strahlen zu vollster Entwicklung, welche von der Kathode ausgehen, welche Hittorf entdeckte, Crookes als strahlende Materie studirte. Zwar erzeugt von der electrischen Entladung, sind diese Kathodenstrahlen in ihrer Ausbreitung doch vollkommen unabhängig von derselben. Indem sie sich so in der Vorstellung ganz absondern von der erzeugenden Entladung, erscheinen sie nach allem, was von ihnen bekannt ist, wie ein Gegenstück zum Lichte: nahe verwandt mit demselben in den geometrischen Verhältnissen der Ausbreitung und doch wieder gänzlich verschieden davon in wesentlichen Eigenschaften. Was sie bei ihrer Unzugänglichkeit an Unbekanntem enthalten, stellt sich so nach Umfang der ganzen Optik an die Seite.

Verschieden vom Licht in der Fähigkeit feste Körper zu durchdringen, enden die Kathodenstrahlen in unseren Entladungsröhren dort, wo sie auf die Glaswand treffen. Was aber würde geschehen, wenn die Wand für Kathodenstrahlen durchlässig gemacht wäre?

Diese Frage durch den Versuch zu beantworten, erschien nicht mehr unmöglich, als Hertz nachgewiesen hatte, dass die

1) Da sämtliche Figuren bei Herstellung der Tafel im Verhältniss von 1:0,74 verkleinert wurden, bedürfen die Angaben „nat. Gr.“, „112“ etc. entsprechender Reduction (Anm. bei d. Correctur).

gewöhnlichen Blattmetalle für Kathodenstrahlen stark durchlässig sind, selbst in drei- und vierfachen Lagen. Freilich sind die Blattmetalle zart und nie frei von Löchern, also unmittelbar nicht geeignet für unser Vorhaben; aber die Kathodenstrahlen dringen nicht durch die Löcher, sondern durch den Stoff der Blätter.¹⁾

Dementsprechend zeigte sich bald, dass selbst 15fache Lagen von gewöhnlichem Blattaluminium noch kräftig durchstrahlt werden, besonders dann wenn man geeignete Kathodenstrahlen erzeugt. Unter einer Anzahl von stärkeren Aluminiumfolien verschiedener Dicke, welche ich mir daraufhin verschaffte, fand sich eine, eben stark genug dem einseitigen Atmosphärendruck auf kleiner Fläche zu widerstehen, löcherfrei, und doch nur achtmal so dick als gewöhnliches Aluminiumblatt. Diese Folie war geeignet, einen durchlässigen luftdichten Verschluss an einer Entladungsröhre zu bilden und den Kathodenstrahlen den Weg in die freie Atmosphäre zu eröffnen. Ob sie ihn betreten werden, war freilich nicht vorzusagen. Die hier zu beschreibenden Versuche werden keinen Zweifel lassen. Einmal erzeugt, pflanzen sich die Kathodenstrahlen auch in den luftgefüllten Raum hinein fort, und zwar auf Strecken von fast Decimeterlänge.

Die Beobachtung der Strahlen kann somit aus dem Entladungsrohre hinaus verlegt werden ins Freie; sie können in beliebigen Medien untersucht werden. Insbesondere aber sind Beobachtung und Erzeugung völlig voneinander unabhängig gemacht; die Bedingungen der ersteren können variirt werden, ohne zugleich an der letzteren zu ändern.

Von besonderem Interesse ist die Möglichkeit, die Strahlen in ein vollständiges Vacuum treten zu lassen, in welchem sie bekanntlich nicht erzeugt werden könnten; die Möglichkeit also,

1) Hertz, Wied. Ann. 45. p. 28. 1892. Gleichzeitig haben auch E. Wiedemann und Ebert auf die Durchlässigkeit der Kathodenbeschläge in Entladungsröhren aufmerksam gemacht; Sitzber. d. phys.-med. Soc. zu Erlangen, 14. Dec. 1891.

Eine Entladungsröhre mit durchlässigem Verschluss herzustellen, hatte ich schon vor längerer Zeit versucht, freilich ohne Erfolg; eine millimeterdicke Quarzplatte war verwandt. Zur Benutzung der Blattmetalle wurde ich von Prof. Hertz selbst aufgefordert und ich bin ihm hiefür, sowie für manche sehr werthvolle Bemerkung zu grossem Danke verpflichtet.

mit ihnen denselben Fundamentalversuch auszuführen, der für den Schall, für das Licht entschieden hat, ob dieselben Vorgänge in der Materie sind oder Vorgänge im Aether. Wie man sehen wird, ist der luftlere Raum kein Hinderniss für die Ausbreitung der Strahlen. Sie durchziehen ihn mit grosser Intensität auf meterlangen Strecken; sie geben sich somit als Vorgänge im Aether zu erkennen. Bei dem Wenigen, was vom Aether bekannt ist, haben sie dadurch an Interesse gewiss nur gewonnen.

Der Apparat.

2. Nach successiver Abänderung fast aller Theile des Entladungsrohres erhielt dasselbe die Form, welche Fig. 1, *EE*, im Querschnitt zeigt.¹⁾ *K* ist die Kathode, eine kreisförmige Aluminiumscheibe von 12 mm Durchmesser; sie sitzt an einem langen Stiele, welcher ganz von dem sehr dickwandigen Glasrohr *Kl* umhüllt wird und welcher bei *l* eingeschmolzen ist. Das Glasrohr passt gut in den Hals *h h*, der Entladungsrohre und ist daselbst bei *h* luftdicht festgekittet. Die Anode *AA* ist ein Stück Messingrohr, das knapp in das Entladungsrohr passt und den Stiel mit der Kathode 12 mm weit vorstehen lässt. Der Platindraht *ppp* hält die Anode in ihrer Lage fest und vermittelt die Zuleitung; er ist eingeschmolzen in das zur Pumpe führende Rohr *R*. Der Kathode gegenüber ist das Entladungsrohr durch eine starke Metallkapsel *mm* und Kittung luftdicht verschlossen. Diese Kapsel zeigt Fig. 2 in natürlicher Grösse. Sie ist in ihrer Mitte, bei *F*, durchbohrt. Ueber diese 1.7 mm weite Bohrung, deren äussere Ränder wohl abgerundet sind, ist das dünne Aluminiumblättchen *Al*²⁾ ge-

1) Alle Theile des Entladungsrohres und das Gehäuse sind genau in richtigem Grössenverhältniss gezeichnet (vgl. den beigegebenen Maassstab), nur der Schirm *SS* erscheint etwas zu klein. Das Inductorium ist nur angedeutet.

2) 1 cm² dieses Blattes wiegt 0.000715 gr, es ist daher 0.00265 mm dick (7.7 mal so dick als gewöhnliches Blattaluminium), dabei leicht zu handhaben und mit der Scheere zu zerschneiden. Es ist das „einmal geschlagene Aluminium“ der Blattmetallfabriken (gewöhnliches Aluminiumblatt ist zweimal geschlagen) und somit als Zwischenproduct in jeder solchen vorrätig. Indessen, nicht jede Fabrik schlägt genügend löcherfrei. Die einzige brauchbare Sorte (unter dreien), welche ich besitze, stammt aus unbekannter Bezugsquelle. Doppelt so dickes Blatt, welches mit fast gleichem Erfolge anwendbar ist, ist leichter einigermaassen brauchbar zu erhalten (z. B. bei J. Trump, Goldschlägerei, Nürnberg.

legt und durch ringsum aufgetragenen Kitt befestigt.¹⁾ Wir nennen diesen für Kathodenstrahlen durchlässigen, für Licht und Luft vollkommen undurchlässigen Verschluss das Fenster, und den Raum der sich in der Figur links davon befindet, den Beobachtungsraum. Das Fenster ist seiner Befestigungsweise nach in gut metallischem Contact mit der Kapsel, welche, wie die Anode, zur Erde geleitet ist. Um nicht das Fenster zugleich als Anode wirken zu lassen, was Corrosion zur Folge hätte, ist der innere metallene Vorschirm *V* angebracht, welcher nur eine ca. 3 mm weite Oeffnung für die Kathodenstrahlen frei lässt. Das Entladungsrohr wird von einem Blechgehäuse *GG* umgeben, an welches sich nach vorn der grosse Blechschirm *SS* anschliesst, der nur die Fensteröffnung frei lässt und gegen den Beobachtungsraum hin geschwärzt ist. Dieses Gehäuse und der Schirm, welche zur Erde geleitet sind, schützen den Beobachtungsraum vor dem Lichte und den electricischen Kräften der Entladung.

Die günstigste Verdünnung ist erreicht, wenn die Potentialdifferenz zwischen den Electroden einer Schlagweite von etwa 3 cm zwischen Kugeln in Luft entspricht. Um diese Schlagweite, und damit die Verdünnung, jederzeit controliren zu können, ist die verstellbare Funkenstrecke *B* (Fig. 1) im Nebenschluss zum Entladungsrohre eingeschaltet. Mit zunehmender Verdünnung nimmt die Funkenlänge rasch zu. Bei geringerer Verdünnung als der angegebenen werden Kathodenstrahlen erzeugt, welche weniger gut durch das Fenster dringen; bei höherer kommt das Entladungsrohr in Gefahr, beschädigt zu werden.²⁾ Das benutzte Inductorium lieferte

Steinbühlerstrasse). Löcher, welche Luft durchlassen, sind stets bei starker Beleuchtung in der Durchsicht mit der Lupe sichtbar, können also vermieden werden.

1) Als Kitt verwende ich für das Fenster Marineleim (1 Holztheer + 2 Pech + 1 Guttapercha), für die übrigen Kittungen Siegellack und darüber Marineleim. Siegellack allein bekommt mit der Zeit Sprünge, Marineleim allein würde durch den Luftdruck durch die Fugen gepresst werden.

2) Die Glasumhüllung des Kathodendrahtes wird durchschlagen, besonders leicht zwischen *h* und *h*₁. Diese Gefahr ist bedeutend vermindert bei einer Röhre, welche Hr. Glastechniker Müller-Unkel in Braunschweig kürzlich verfertigte. Die Glashülle der Kathode ist hier in das

mit Quecksilberunterbrecher (etwa sechs Unterbrechungen in der Secunde) und vier Accumulatoren für sich bis 15 cm lange Funken zwischen Kugeln. Das Entladungsrohr blieb stets an der Pumpe, einer Geissler'schen Quecksilberluftpumpe, denn erhielt sich auch das Vacuum bei unbenutztem Apparate wochenlang unverändert, so stieg doch der Druck während der Benutzung stets merklich an, so dass von Zeit zu Zeit nachgepumpt werden musste. Es wurde übrigens die Vorsicht gebraucht, den Unterbrecher stets nur für die wenigen Secunden in Gang zu setzen, welche zu einer Beobachtung nöthig sind; so wurde das Fenster vor Erhitzung bewahrt. Wir beobachten nun das Folgende.

Kathodenstrahlen in der freien Atmosphäre.

3. Kathodenstrahlen bringen die Luft zu mattem Leuchten. Ein Schimmer bläulichen Lichtes umgiebt das Fenster; er ist am hellsten in der Nähe des Fensters selbst, nach aussen hin ohne deutliche Begrenzung; weiter als etwa 5 cm vom Fenster reicht er nicht. Das Licht scheint bei jeder Entladung büschelförmig in allen Richtungen aus dem Fenster zu schiessen; es ist nicht hell genug, um im Taschenspectroskop untersucht zu werden. Das Fenster selbst ist dabei dunkel, solange es neu ist. Nach einigem Gebrauche fängt es an ebenfalls schwach zu leuchten, ungleichmässig, nur an einzelnen Punkten der kleinen durchstrahlten Fläche; an einigen fahl bläulich, an anderen fahl grünlich oder gelblich. Einmal eingetreten, erscheint dies Leuchten regelmässig in derselben Weise immer wieder. Auf diese übrigens unwesentliche Erscheinung kommen wir zurück.

4. Phosphorescenzfähige Körper, in die Nähe des Fensters gehalten, leuchten an der ihm zugewandten Seite hell in dem ihnen eigenthümlichen Lichte. Neben dem glänzenden Aufleuchten der Erdalkaliphosphore, des Kalkspaths, des Uranglases verschwindet das Licht der Luft und des Fensters vollständig. Mit zunehmender Entfernung vom Fenster nimmt die Erscheinung an Intensität rasch ab, sie verschwindet in einem

Entladungsrohr eingeschmolzen, ausserdem sitzt das Fenster an einem eingeschmolzenen Platinröhrchen, so dass jede weitere Kittung vermieden ist. Das Rohr hat sich sehr gut bewährt.

Abstände von 6 oder 8 cm. Nur die Grösse der Entfernung bestimmt die Helligkeit des Leuchtens, ihre Richtung ist ohne Einfluss. So ist z. B. die Phosphoreszenz eines Kalkspathstückchens gleich hell, ob es sich bei Φ (Fig. 2) oder bei Φ' befindet. Hält man einen ebenen phosphoreszenzfähigen Schirm¹⁾ senkrecht gegen die Fensterwand, so dass seine Kante am Fenster vorbeigeht, so stuft sich die am Fenster blendende Helligkeit nach allen Seiten hin gleichmässig ab; gleich helle Punkte liegen auf Halbkreisen, deren Mittelpunkt das Fenster ist. Diese allseitige Ausbreitung vom Fenster aus war zu erwarten, denn Kathodenstrahlen gehen diffus durch Aluminium.²⁾

Die Farbe und relative Helligkeit des Leuchtens ist hier dieselbe, wie sie in evacuirten Röhren unter dem Einflusse der Kathodenstrahlen beobachtet wird. Gewöhnliches Glas, Uranglas, Flintglas, Kalkspath, Kreide leuchten in ihrer bekannten Weise; der Kalkspath leuchtet auch hell nach. Sehr hell, und lange nachleuchtend, strahlen die Erdalkaliphosphore³⁾; nicht weniger hell, aber ohne bemerkbares Nachleuchten Pentadecylparatolyketon (grün)⁴⁾, Asaron (violett).⁵⁾ Eine Sammlung von Platincyanüren gab zum Theil glänzende Erscheinungen, Farbe und Helligkeit stimmte jedesmal mit der im ultravioletten Sonnenspectrum beobachteten überein⁶⁾; Urannitrat gab hell sein charakteristisches Linienspectrum.⁶⁾ Nicht-

1) Als solcher ist Seidenpapier getränkt mit Pentadecylparatolyketon besonders geeignet. Das Papier wird auf eine kalte Glasplatte gelegt und die geschmolzene Substanz mit einem Pinsel gleichmässig aufgetragen. Ein solcher Schirm ist durchscheinend, kann also von beiden Seiten gleich gut beobachtet werden und leuchtet viel heller als Uranglas, ohne Nachleuchten. Unter einem phosphoreszenzfähigen Schirm schlechthin wird künftig stets so präparirtes Papier verstanden sein, unter einem phosphoreszenzfähigen Körper ein Stückchen Schwefelstrontiumphosphor an Draht befestigt und im Dunklen aufbewahrt. Ueber das Keton siehe Krafft, Chem. Ber. 21. p. 2265. 1888.

2) Hertz, Wied. Ann. 45. p. 31. 1892.

3) welche ich in denselben Proben mit demselben Resultate in evacuirten Röhren beobachtet hatte.

4) und also auch mit der in evacuirten Röhren zu beobachtenden vgl. Hagenbach, Pogg. Ann., Jubelbd. und E. Goldstein, Wien. Ber. 80. p. 151. 1879.

5) Wie von E. Becquerel im Phosphoroskop beobachtet und in La Lumière 1. p. 336. 1867 abgebildet.

leuchtend, wie in evacuirten Röhren, bleibt die am Lichte stark phosphorescirende Eosingelatine. Dunkel bleiben auch alle Körper, die überhaupt nicht phosphorescenzfähig sind, wie Metalle, Glimmer, Gypskrystalle, Schwefelkrystalle. Quarz leuchtete in allen versuchten Proben blau, aber nur ganz dicht an das Fenster gehalten, und ebenso verhielt sich ein Stück Steinsalz. Offenbar werden hier auch die schwächsten Kathodoluminescenzen zum Vorschein gebracht; schwaches blaues Licht habe ich bei Quarz auch in evacuirten Röhren beobachtet.

Mit Bezug auf das Leuchten des Fensters war Aluminiumoxyd von Interesse. Solches Oxyd, welches sich an Aluminiumkathoden gebildet hatte¹⁾, leuchtete matt fahlgrünlich und bläulich gemischt, nur an einzelnen Punkten sehr hell, also wie das Fenster. Der Annahme, dass dessen Leuchten die Phosphorescenz einer minimalen, unter dem Einflusse der Kathodenstrahlen und des Ozons (6.) gebildeten Oxydschicht sei, widerspricht auch keine spätere Beobachtung (5, 12, 15, 17).

Flüssigkeiten, welche bisher den Kathodenstrahlen nicht zugänglich waren, wurden meist nur wenig oder garnicht erleuchtet. So Lösungen von Eosin, Fluorescein, Magdalaroth, schwefelsaurem Chinin, Chlorophyll, welche sämmtlich am Tageslicht schön fluorescirten. Diese Lösungen verhalten sich also ähnlich der Eosingelatine. Nur ein Tropfen Petroleum, an einem Holzstäbchen hängend, liess sein blaues Fluorescenzlicht erscheinen, und ähnlich verhielten sich andere fluorescirende Kohlenwasserstoffe. Auch in festem Zustande blieben die oben genannten Körper dunkel, mit alleiniger Ausnahme des schwefelsauren Chinins, welches sehr hell, blau, leuchtete.²⁾

1) Beim Oeffnen lange benutzter Entladungsröhren wuchsen weisse fadenförmige Wucherungen aus der Kathode, die bald abfielen und sich zu einem fast Kubikcentimeter grossen Häufchen sammelten. Schon Hittorf hat diese Erscheinung beobachtet und als Oxydation der aufgelockerten Aluminiumoberfläche gedeutet (Pogg. Ann. 136. p. 23. 1869). Warburg fand, dass sie nur in Gegenwart von Quecksilberdämpfen eintritt (Wied. Ann. 31. p. 577. 1887).

2) Mit demselben Resultate wurde schwefelsaures Chinin kürzlich beobachtet von Ebert und Wiedemann unter dem Einflusse von Kathodenstrahlen, welche durch electriche Schwingungen erzeugt waren. Wied. Ann. 50. p. 258. 1893.

Röhren von Stanniol oder Glas, zwischen das Fenster und einen phosphoreszenzfähigen Körper so eingeschoben, dass die Verbindungslinie beider in die Rohraxe fällt, verstärkten sein Leuchten nicht, sie schwächten es eher.

5. Alle Phosphoreszenzerscheinungen im Beobachtungsraum hören auf, wenn ein an die Entladungsröhre gelegter Magnet die Kathodenstrahlen von der Innenfläche des Fensters abhält; auch das Fenster und die Luft bleiben dann dunkel.

6. Auf die Haut fallend bringen die Kathodenstrahlen keinerlei Empfindung hervor, ebensowenig wenn sie das Auge treffen. Die Nase verspürt starken Ozongeruch und der eigenthümliche Geschmack, welchen die Kathodenstrahlen auf der Zunge hervorrufen, dürfte ebenfalls nur dem Ozon zuzuschreiben sein.

7. Eine $\frac{1}{2}$ mm dicke, nicht zu kleine Quarzplatte, an irgend einer Stelle zwischen Fenster und phosphoreszenzfähigem Körper eingeschoben, bringt sein Leuchten zum Verlöschen; ein gewöhnliches echtes oder unechtes Gold-, Silber- oder Aluminiumblatt lässt es ohne merkbare Schwächung bestehen. Die Quarzplatte schneidet auch das Leuchten der Luft ab; von oben herabsehend, findet man die Luft wohl zwischen Fenster und Quarz, nicht aber hinter dem Quarz leuchtend. Die Metallblätter dagegen schneiden auch das Leuchten der Luft nicht ab, es ist sehr deutlich auch hinter denselben zu sehen; die Metallblätter selbst bleiben dunkel. Die Undurchlässigkeit der benutzten Quarzplatte und die Durchlässigkeit der Metallblätter sind charakteristisch für Kathodenstrahlen im Gegensatz zum Licht. Dass aber Quarz für Kathodenstrahlen undurchlässiger sei als die Metalle, dürfen wir bei so ungleichen Dicken nicht schliessen; Metallbleche von $\frac{1}{3}$ mm Dicke zeigen sich ebenso undurchlässig, wie die Quarzplatte. Einen festen Körper, der in dieser oder grösserer Dicke merkbar durchlässig gewesen wäre, habe ich überhaupt nicht gefunden. Dagegen erwiesen sich alle Substanzen als mehr oder minder durchlässig, die in dünnerer Schicht erhältlich waren. Seidenpapier, auf einen phosphoreszenzfähigen Schirm gelegt, wirft erst in doppelter Lage einen gut bemerkbaren Schatten, und es ist dabei gleichgiltig, ob das Papier weiss, undurchsichtig schwarz oder sonst irgendwie gefärbt ist.

Schreibpapier ist schon weniger durchlässig, und ein mit Zeichenpapier von 0.12 mm Dicke belegter Schirm muss ganz dicht an das Fenster gehalten werden, um deutlich zu leuchten. Ein Cartonblatt von 0.3 mm Dicke hielt alles Leuchten ab. Geblasene Glashäutchen zeigen merkbare Durchlässigkeit schon bei einer Dicke von 0.02 mm, sie kommen dann etwa dem obigen Zeichenpapiere gleich; bei 0.01 mm Dicke werfen sie nur mehr schwache Schatten, und Glasblättchen, die Newton'sche Farben zeigen, sind so durchlässig oder eher durchlässiger als doppeltes Blattaluminium, welches etwa die gleiche Dicke besitzt. Ein wesentlicher Unterschied zwischen Dielektriken und Metallen besteht also nicht. Auch dünn gespaltener Glimmer und Collodiumhäutchen, auf ebener Unterlage erzeugt und abgezogen, beide etwa 0.01 mm dick, sind sehr durchlässige Schirme. Um bei der Untersuchung des Glases Täuschung durch dessen eigenes helles Phosphoreszenzlicht auszuschliessen, wurde noch ein Aluminiumblatt zwischen Glashäutchen und phosphoreszenzfähigem Körper eingeschoben; oder es wurde, noch zweckmässiger, ein phosphoreszenzfähiger Schirm benutzt, der mit Aluminiumblatt überzogen und also ein für alle Male für Licht unempfindlich gemacht war. Ein solcher dem Fenster zugewandter Aluminiumüberzug schwächt das Leuchten des Schirmes nicht, er verstärkt es sogar durch Reflexion des Phosphoreszenzlichtes; die Wassertropfchen dagegen, welche das Aluminiumblatt am Schirme festhalten, bilden sich als schwarze Flecken ab. In genügend dünnen Schichten ist aber auch eine wässrige Flüssigkeit durchlässig: Seifenhäutchen in einem Drahttring ausgespannt geben sichtbare Verdunkelung nur, wenn sie Farben höherer als der sechsten Ordnung zeigen, wenn sie also dicker sind, als 0.0012 mm. Am meisten überrascht die Durchlässigkeit immerhin bei Metallblechen. Vom Blattaluminium ausgehend zu immer dickeren Folien, gelangen wir bis zu einem sehr widerstandsfähigen gewalzten Aluminiumblech von 0.027 mm Dicke, welches eben noch bemerkbar durchlässig ist; Blech und phosphoreszenzfähiger Schirm müssen jetzt allerdings dicht ans Fenster gehalten werden. Ebenso, und also etwa gleich dem obigen Zeichenpapiere, verhielten sich dünnstes Eisenblech und gewöhnliches Stanniol, beide 0.02 mm dick. Sind zwei oder

mehrere durchlässige Schirme zwischen Fenster und phosphoreszenzfähigem Körper eingeschaltet — ein Glashäutchen, eine Aluminiumfolie und ein Goldblatt wurden versucht — so ist es für dessen Leuchten gleichgiltig, in welcher Reihenfolge und in welchen Stellungen sie sich befinden. Vorausgesetzt ist dabei, dass die Schirme genügend gross sind. War von einer auf Durchlässigkeit zu prüfenden Schicht nur ein kleines Stückchen vorhanden, so wurde dasselbe aus alsbald (8.) ersichtlichem Grunde entweder dicht an den phosphoreszenzfähigen Schirm oder dicht an das Fenster gehalten oder aber über die Oeffnung eines grösseren undurchlässigen Diaphragmas befestigt.

Vergleichung der vorstehenden Angaben lehrt, dass kein einziger der so verschiedenen untersuchten Körper den anderen gegenüber hervorragend durchlässig oder undurchlässig genannt werden könnte. Für Licht kann ein fester Körper in hundertmillimeterdicker Schicht undurchlässiger sein als ein anderer in Meterdicke; so ungeheure Unterschiede scheinen für Kathodenstrahlen nicht zu bestehen.

Die Durchlässigkeit von Glas und Collodium erscheint im Widerspruch mit der Beobachtung von Crookes¹⁾ und Goldstein²⁾, dass auch dünne Schichten dieser Körper schwarze Schatten auf die Wand einer Entladungsröhre werfen. Es kann indessen bemerkt werden, erstens, dass man in Entladungsröhren unter sehr ungünstigen Umständen beobachtet. Mitten in der Fülle von Licht ist es unmöglich zu sagen, ob der Schatten hinter einem durchsichtigen Körper vollkommen dunkel ist oder nicht, und dies ist wohl zum Teil auch der Grund, warum die Durchlässigkeit zuerst bei den undurchsichtigen Metallen aufgefunden wurde. Zweitens ist es nicht ausgeschlossen und sogar wahrscheinlich, dass die genannten Beobachter unter anderen Umständen andere Arten von Kathodenstrahlen erzeugten, welche weniger fähig sind die Materie zu durchdringen als die hier benutzten, welche nicht nur passend erzeugt, sondern auch durch das Fenster filtrirt sind.

Wurde das Aluminiumfenster durch ein Glasfenster ersetzt,

1) Crookes, Phil. Trans. p. 150. 1879 (I).

2) Goldstein, Monatsber. d. Berl. Akad. p. 87. 1880.

so konnten alle wesentlichen Versuche mit gleichem Erfolge wiederholt werden. Vortheilhafter aber bleibt das Aluminiumfenster; nicht dass es durchlässiger wäre, sondern weil Aluminium undurchsichtig und bei gleicher Dicke viel leichter zu behandeln ist als Glas.

8. Die Atmosphäre ist ein trübes Medium für Kathodenstrahlen; dieselben breiten sich in ihr nicht geradlinig aus, sondern diffus. — Befindet sich ein phosphoreszenzfähiger Schirm parallel der Fensterwand aufgestellt, sagen wir in 3 cm Abstand davon, und schieben wir eine undurchlässige Wand, etwa eine $\frac{1}{2}$ mm dicke Quarzplatte, mitten zwischen Fenster und Schirm langsam ein, so erscheint nur eine äusserst verwaschene Schattengrenze am Schirm. Befestigen wir nun die Quarzplatte in ihrer Lage und markiren auf dem Schirm die Linie, in welcher eine durch das Fenster und die Quarzkante gelegte Ebene ihn schneidet, so bemerken wir, dass die Helligkeit fast 1 cm weit in den so markirten geometrischen Schatten der Quarzplatte hineingreift. Bringen wir die Quarzplatte näher an den Schirm, so wird dies Uebergreifen geringer und zugleich der Schatten besser begrenzt; bei 3 mm Abstand ist er noch immer recht unscharf; völlig scharf wird er erst, wenn die Platte den Schirm berührt. Ebenso wirft ein 2 mm dicker Draht nur dann einen gleichgrossen, fast scharf begrenzten schwarzen Schatten, wenn er an dem Schirm anliegt; entfernen wir ihn davon, nach dem Fenster zu, so wird der Schatten sogleich erhellt und sehr verwaschen; er ist völlig verschwunden, wenn der Draht 3 mm vom Schirme absteht. Die Kathodenstrahlen greifen also stark um die Kanten undurchlässiger Körper herum. Täuschung durch die erleuchtete Luft ist dabei ausgeschlossen, denn überziehen wir den phosphoreszenzfähigen Schirm mit Aluminiumblatt, so ändert das nichts. Mit der Quarzplatte können wir uns übrigens auch davon überzeugen, dass die bisherige Vorstellung, alle Wirkung gehe nur von der kleinen durchstrahlten Fensterfläche aus, richtig ist. Denn schieben wir die Kante der Quarzplatte ganz dicht am Fenster vorbei, so beginnt die Verfinsterung des Schirmes beim ersten Contact mit dem Fensterrand und sie ist eben vollständig geworden beim zweiten Contact.

Dem Vorhergehenden entsprechend ist es auch nicht mög-

lich, durch Diaphragmen scharfe Strahlen selbst nur von Centimeterlänge abzusondern. Stellen wir eine Metallplatte mit scharfkantiger millimeterweiter Oeffnung etwa in 2 cm Abstand vom Fenster auf, so finden wir ein scharfes, helles, gleichgrosses Bild der Oeffnung nur ganz dicht hinter diesem Diaphragma; schon 3 mm davon ist das Bild etwa auf's Fünffache vergrössert und verwaschen; in 8 mm Entfernung auf's Zehnfache vergrössert, in 12 mm Entfernung sehr schlecht begrenzt und noch viel mehr vergrössert. Auf einen einzigen Blick lässt Fig. 3 diese Ausbreitung der Strahlen hinter einer 15 mm langen, 2 mm breiten Spalte ss übersehen, welche in das Cartonblatt CC geschnitten, in 12 mm Abstand vom Fenster F aufgestellt ist. Der Schirm Φ_1 ¹⁾ ist hier so an die Spalte gehalten, dass er das Fenster in seine Ebene aufnimmt. Die strauchartige Ausbreitung der Strahlen zeigt sich hier sehr deutlich (Helligkeit ist möglichst getreu in Schwärze wiedergegeben). Neigen wir den Schirm in die Lage Φ_2 , unter 45° zur Spaltebene, so erscheint Fig. 3a. Man bemerkt hier, besser als in der vorigen Stellung, dass ein Bruchtheil der Strahlen doch geradlinig verläuft, ganz wie bei Licht in Milchglas oder in verdünnter Milch, durch welche man neben zerstreutem Lichte auch scharfe Bilder sehen kann. In der ersten Stellung des Schirmes konnten die geradlinigen Strahlen nicht gut zur Wirkung kommen, da sie tangential zum Schirm verlaufen. Wird der Schirm seitlich an die Spalte gehalten, Φ_3 oder Φ_3' (Fig. 3), so ist die Erscheinung Fig. 3b (für die Lage Φ_3). Dieselbe bleibt auch dann bestehen, wenn Schirm und Spalte zusammen in der Ebene der letzteren soweit verschoben werden, dass geradlinige Strahlen den Schirm nicht mehr treffen können. Die strauchartige Ausbreitung, wie in Fig. 3 abgebildet, entspricht also der Wirklichkeit und ist nicht etwa durch das Vorhandensein des Schirmes Φ_1 bedingt oder gestört. Drehen wir schliesslich den Schirm aus der Lage Φ_3 um seine Kante ab in die Lage Φ_4 , so dass er an den Spaltschirm zu liegen kommt, so bleibt er vollkommen dunkel. Es biegen also keine Strahlen nach rückwärts um; wieder in Uebereinstimmung mit Fig. 3.

1) Wie stets Pentadecylparatolyketonpapier.

Fällt paralleles Licht durch eine kurze, verticale, millimeterbreite Spalte in einen planparallelen mit Milch gefüllten Trog, so dass das Lichtbündel in der obersten Schicht der Milch verläuft, und betrachtet man die Milch von oben, so sieht man das Lichtbündel von seiner schmalen Eintrittsstelle aus genau in derselben Weise strauchartig sich ausbreiten wie die Kathodenstrahlen in Fig. 3. Selbst die Andeutung geradliniger Strahlen ist vorhanden. Versenkt man die Spalte, statt sie vor den Trog zu stellen, in die Milch, so bleibt die Erscheinung die gleiche und die Analogie mit dem Kathodenstrahlenversuch wird vollständiger.

9. Kathodenstrahlen sind photographisch wirksam.¹⁾ Lichtempfindliches Copirpapier, ans Fenster gehalten, schwärzt sich etwa ebenso rasch wie am gedämpften Sonnenschein eines nebeligen Tages; hinter einer Quarzplatte bleibt es unverändert. Trockenplatten mit Entwicklung sind auch in grösserem Abstand vom Fenster nach wenigen Secunden vollkommen geschwärzt. Man kann daher den phosphorescenzfähigen Schirm durch die photographische Platte ersetzen. Fig. 4 ist die Copie einer so erhaltenen Aufnahme. Die empfindliche Schicht war dabei, wie Fig. 4a zeigt, zur Hälfte mit einer $\frac{1}{2}$ mm dicken Quarzplatte *QQ* bedeckt und quer darüber noch das doppelte Aluminiumblatt *Al* gelegt. Hätte nun Licht gewirkt, so müsste der Anblick der Copie etwa durch Fig. 4a gegeben sein; sehr verschieden davon ist Fig. 4. Nicht das Aluminiumblatt, sondern die Quarzplatte hat den schwarzen Schatten geworfen. Dieser Schatten ist im IV. Quadranten (vgl. Fig. 4a I, II etc.) etwas aufgehellt; dies ist die Wirkung des Lichtes der Luft, sie fehlt gänzlich im III. Quadranten, welcher ausser mit Quarz auch mit Aluminium bedeckt ist. Ausserordentlich viel stärker als das Luftlicht wirken die Kathodenstrahlen, wie dies die obere Hälfte der Fig. 4 zeigt. Ein Schatten des doppelten Aluminiumblattes ist nur in zarter Andeutung vorhanden, Quadrant II. Fig. 4 ist übrigens nur ein getreues Abbild dessen, was ein phosphorescenzfähiger Schirm

1) Schon E. Goldstein beobachtete photochemische Wirkungen der Kathodenstrahlen in Entladungsröhren. Monatsber. d. Berl. Akad. p. 84. 1880.

direct zeigt. Die photographische Schicht kann indessen bei langer Exposition auch sonst unbemerkbare Wirkungen zum Vorschein bringen. So zeigte sich z. B. ziemlich kräftige Schwärzung hinter dem oben (7.) als undurchlässig bezeichneten Cartonblatt von 0.3 mm Dicke. Das Cartonblatt bedeckte die empfindliche Schicht und zwischen beiden waren Streifen verschiedener Metallblätter eingelegt. Diese Streifen bildeten sich ganz nach Maassgabe ihrer Durchlässigkeit heller (im Negativ) auf dunklerem Grunde ab und ganz hell blieb die Schicht nur dort, wo ein dicker Metallrahmen über das ganze gelegt war. Es waren also wirklich Kathodenstrahlen durch das dicke Cartonblatt gegangen. Die Exposition betrug dabei nur 2 min.

Wursterpapier wurde im Beobachtungsraum gebläut; mit Quarz bedeckt blieb es unverändert; es ist unentschieden ob dies directe chemische Wirkung der Kathodenstrahlen ist, oder Wirkung des durch sie erzeugten Ozons (6). Andere chemische Wirkungen habe ich nicht beobachtet. Elektrolytisches (H_2O —) Knallgas, gegen das Fenster strömend oder in einer sehr dünnen Seifenblase durchstrahlt, explodirte nicht. Schwefelkohlenstoff entzündete sich nicht. Selbst das so leicht zersetzbare Schwefelwasserstoffgas blieb bei längerer Durchstrahlung in einem an die Fensterwand gekitteten Glasrohre unverändert; ein Schwefelbeschlag war nicht zu entdecken. Ein Gemisch von 3 Vol. Wasserstoff und 1 Vol. Stickstoff, in einem ähnlichen Rohre durchstrahlt, welches etwas Wasser enthielt und in eine Capillare mit Alkoholindex mündete, gab keine Volumenverminderung, also keine Ammoniakbildung zu erkennen. Es zeigte sich dagegen hier, und ebenso bei Durchstrahlung von Luft, Kohlensäure und Wasserstoff, eine kleine Volumenzunahme, welche nach der Durchstrahlung wieder verschwand¹⁾ und welche wahrscheinlich nur Erwärmung der Gase durch die absorbirten Kathodenstrahlen zuzuschreiben ist. Der Grösse dieser Volumenausdehnung nach wäre die Erwärmung nur sehr gering.²⁾ Ein

1) Das Verschwinden war oft unregelmässig, der Apparat war nicht gegen äussere Temperaturschwankungen geschützt.

2) Das centrisch an die Fensterwand gekittete Rohr war innen 6 cm lang und 4,5 cm weit, es wurde also der Haupttheil der Kathodenstrahlen in der eingeschlossenen Luft und nur wenig an den Wänden absorbirt. Das Rohr fasste 95,4 cm³ Gas, die Volumzunahme ging bei dauernder Bestrahlung bis zu 25 mm³, was nur 0,08° C. Erwärmung entspräche.

feines Thermometer und auch eine Thermosäule, am Fenster bestrahlt, gaben dementsprechend keine deutlichen Wärmeanzeigen. Die Wirkung einer Kerzenflamme in 50 cm Abstand war mit der benutzten Thermosäule gut zu bemerken. Der Energieinhalt unserer Kathodenstrahlen könnte demnach sehr gering erscheinen, wenn nicht zu bedenken wäre, auf welche äusserst kurzen Zeitintervalle die Strahlung beschränkt ist.

10. Kathodenstrahlen dringen in das Innere metallisch abgeschlossener Räume; sie sind vollkommen trennbar von den erzeugenden electricischen Kräften. — Wir haben bisher die Kathodenstrahlen durch die leitende, mit der Erde verbundene Fensterwand in den Beobachtungsraum treten lassen; derselbe war geschützt vor den electricischen Kräften der erzeugenden Entladung (2), aber, wie sich zeigt, nicht vollkommen. Man kann mit jedem Leiter im Beobachtungsraum kleine Fünkchen aus dem Schirme (*S*, Fig. 1) ziehen, und ebenso auch aus einer durchstrahlten Aluminiumfolie. Diese Fünkchen sind indessen unverändert auch dann vorhanden, wenn ein an das Entladungsrohr gelegter Magnet (5) die Kathodenstrahlen vom Beobachtungsraume abhält. Dies zeigt an, dass die electricischen Kräfte, welche die Fünkchen hervorbringen, in keinem näheren Zusammenhange stehen mit den Kathodenstrahlen. Es ist zu erwarten, dass die Funken ganz wegfallen, die Kathodenstrahlen nichtsdestoweniger bleiben würden, wenn der gesammte Entladungsapparat in eine leitende, an die Fensterwand schliessenden Hülle eingeschlossen wäre. Leichter in der Ausführung ist es, umgekehrt, den gesammten Erzeugungapparat auszuschliessen aus einer vollkommen geschlossenen leitenden Hülle. Das dicht gelöthete Blechkästchen *CC*, Fig. 5, ist als solche Hülle am Fenster aufgestellt. Seine abschraubbare Vorderwand *FF* ist ein Metallrahmen, dessen 4×4 cm² grosse Oeffnung mit aufgelötheter Aluminiumfolie von 0,0045 cm Dicke (doppelte Fensterdicke) bespannt ist. In dieses Kästchen nun dringen die Kathodenstrahlen ganz ebenso gut ein, als wäre nur seine Vorderwand allein vorhanden. Hiervon überzeugt man sich am besten durch Einschliessen einer photographischen Platte in dasselbe. Das Negativ der oben besprochenen Fig. 4 ist thatsächlich in

diesem Kästchen erhalten worden¹⁾ und unterscheidet sich nicht von anderen, im freien Beobachtungsraume aufgenommenen. Fig. 4 zeigt insbesondere, dass auch das Leuchten der Luft im Kästchen vorhanden ist, dass es also nicht den electricischen Kräften, sondern den Kathodenstrahlen angehört. Ersetzen wir nun einen Theil der Seitenwand des Kästchens durch aufgelöthetes, engmaschiges Drahtnetz, so kann dieses Leuchten sowie die Phosphoresenz eingelegter Körper direct beobachtet werden; es gelingt dagegen nicht, mit einem spitzen Draht *D* (Fig. 5) auch noch so kleine Fünkchen im Innern des Kästchens aus der Vorderwand zu ziehen; sei es dass der Draht mit der Rückwand verbunden, sei es dass er von ihr isoliert ist. Nur wenn im letzteren Falle der Draht einige Centimeter weit nach aussen verlängert ist, dann gibt er Fünkchen gegen die Vorderwand; in diesem Falle leiten wir aber auch die electricischen Kräfte durch die Isolation des Drahtes von hinten ins Kästchen hinein.

Es ist also möglich, die Kathodenstrahlen von electricischen Kräften (im engeren Sinne) vollständig zu trennen. Damit ist auch die Annahme ausgeschlossen, dass das Fenster oder andere Schichten, welche wir als durchstrahlt bezeichnet haben, als Kathoden im gewöhnlichen Sinne wirkten. Auch sendet die Rückseite einer solchen Schicht nur an denjenigen Stellen Strahlen aus, welche vorne bestrahlt entsprechen, wie die durch Aluminiumblatt sich fortsetzenden Schatten von Drähten und der Quarzplatte (8) zeigten. Kathodenstrahlen von der beobachteten Länge in freier Luft, und Kathodenstrahlen überhaupt im vollständigen Vacuum (s. w. u.), von der Rückseite einer Platte ausgehen zu lassen, und zwar in allen Richtungen, dies gelingt überhaupt in keiner anderen bekannten Weise, als indem man Kathodenstrahlen auf die Vorderseite der Platte fallen lässt.

11. Electricische Körper verlieren ihre Ladung im Beobachtungsraume. — Eine isolirte, in der Nähe des Fensters aufgestellte Metallplatte — etwa eine Aluminiumscheibe von 17 mm Durchmesser — nimmt bei Bestrahlung keine Ladung

1) Die Exposition konnte ohne Verdunkelung des Zimmers vorgenommen werden, das Kästchen schliesst lichtdicht, es ist nur für Kathodenstrahlen durchlässig.

an, die am empfindlichen Exner'schen Electroscop bemerkt werden könnte. War dagegen der Platte anfänglich eine positive oder negative Ladung ertheilt, so fallen die Blätter des Electroscopes bei Bestrahlung sofort zusammen. An all dem wird nichts geändert, wenn Platte und Electroscop von einem leitend an die Fensterwand schliessenden Käfig aus sehr engmaschigem Drahtgewebe umgeben werden. Die öfters benutzte $\frac{1}{2}$ mm dicke Quarzplatte, an das Fenster gelegt, hält die Wirkung ab und zwar erst dann, wenn sie das Fenster eben vollkommen bedeckt. Eine Aluminiumfolie lässt die Wirkung hindurch. Abhalten der Kathodenstrahlen durch einen genügend starken, an die Entladungsröhre gelegten Magneten verhindert die Wirkung. Entfernen wir die Aluminiumscheibe auf 8 cm vom Fenster, also bis an die Grenze der wahrnehmbaren Phosphorescenzen, so ist die Wirkung kaum bedeutend schwächer; sie zeigt sich selbst noch in 30 cm Entfernung vom Fenster sehr deutlich. Einschieben der Hand mitten zwischen Fenster und Platte hält sie ab. Die plötzliche Entladung der Platte in der Nähe des Fensters wird erst durch Hinzufügen einer mittelgrossen Leydnerflasche etwas verlangsamt. Auch in verdünnter Luft habe ich die entladende Wirkung beobachtet. Es ist nicht entschieden, ob hier eine Wirkung der Kathodenstrahlen auf die durchstrahlte Fensterfläche, oder auf die Luft, oder endlich auf die bestrahlte Platte beobachtet wurde. Das Letztere wird man freilich bei den grossen Entfernungen für wenig wahrscheinlich halten.

Kathodenstrahlen im Vacuum.

12. Ist ein Entladungsrohr aufs äusserste evacuirt, so geht die electriche Entladung nicht mehr hindurch: Es ist unmöglich Kathodenstrahlen im vollständigen Vacuum zu erzeugen. Ebenso wenig ist es daher möglich, in einem gewöhnlichen Entladungsrohre die weitere Frage zu entscheiden, ob auch zur Fortpflanzung der Strahlen das Vorhandensein von Materie nöthig ist, oder ob nicht. Verlegen wir aber das vollständige Vacuum aus dem Entladungsrohr in den Beobachtungsraum, so wird der entsprechende Versuch ausführbar.

Dass bei mittleren Verdünnungsgraden im Beobachtungsraum Strahlen sich absondern lassen, die um so schärfer und

um so länger werden je geringer der Druck wird, und auf welche der Magnet wirkt, dies hatten zunächst Versuche gezeigt, welche in vollkommenerer Ausführung weiter unten (18) beschrieben werden sollen.

Für die höchsten Verdünnungen wurde daraufhin dem Apparate folgende Gestalt gegeben (Fig. 9, $\frac{1}{4}$ nat. Gr.). An die Fensterwand *mm* des nur theilweise sichtbaren Entladungsrohres *EE* ist jetzt die Metallhülse *hh* gelöthet in welche das Glasrohr *BB* gekittet ist, bestimmt den Beobachtungsraum zu umschliessen. Das verjüngte eingekittete Ende dieses Rohres ist bis auf eine 1,7 mm weite Öffnung verengt und über diese das Fenster gekittet (wie bisher Aluminiumfolie von 0,0027 mm Dicke). Die Öffnung in *mm*, welche sonst das Fenster trug, ist jetzt frei und lässt die Strahlen auf das Fenster fallen, während sie von dessen Kittung abgeblendet sind. Die Anordnung hat den Vortheil, dass das vollständig zu evacuierende Rohr *BB* durch keine andere Kittung abgeschlossen ist, als die unvermeidliche des Fensters. In dieses Beobachtungsrohr *BB* sind die Electroden *a* und *k* eingeschmolzen; *a* eine den Querschnitt des Rohres fast ausfüllende Aluminiumscheibe mit 2,5 mm weiter centraler Oeffnung, zugleich als strahlenabsonderndes Diaphragma zu benutzen, *k* eine kleinere Aluminiumplatte. Das Rohr ist mit derselben Geisslerschen Hahnluftpumpe verbunden, welche auch das Entladungsrohr evacuirt, doch können beide Räume durch Hähne für sich abgeschlossen werden. Das Beobachtungsrohr hält die höchsten Verdünnungen stundenlang unverändert, auch wenn das Entladungsrohr noch mit Luft erfüllt ist: das Fenster schliesst also vollkommen dicht. Gehäuse und Schirm umgeben das Entladungsrohr wie stets.

Ist zunächst die Verdünnung im Beobachtungsraume gleich der im Entladungsrohre stets innegehaltenen und also etwa gleich der in Crookes' Versuchen benutzten, so zeigt sich Folgendes. Zwischen dem Fenster und der Electrode *a* mit dem Loch (welche jetzt nur als Diaphragma wirkt) leuchtet die ganze Glaswand sehr hell grün, während im Innern des Rohres keinerlei Licht zu sehen ist. Das grüne Phosphoreszenzlicht des Glases erstreckt sich auch noch etwas über die Elektrode hinaus und auch ein wenig in das zur Pumpe

führende Rohr hinein, wie in der Figur durch Schraffirung angedeutet und wie es geradliniger Ausbreitung von Kathodenstrahlen in allen Richtungen vom Fenster aus entspricht. Das Fenster selbst leuchtet in seiner gewöhnlichen Weise (3)¹⁾. Hinter der Electrode *a*, bis ans Ende des Rohres, ist das Glas dunkel bis auf einen etwa 9 mm grossen, ziemlich scharfen Fleck Φ am äussersten Ende. Zwischen den beiden Electroden *a* und *k* leuchtet die Luft matt bläulich²⁾. Nähern wir dem Beobachtungsrohre einen Magneten, so ändert sich die Vertheilung der Glasphosphoreszenz, insbesondere wandert der grüne Fleck Φ . Befindet sich der Südpol eines Hufeisenmagneten vor dem Rohre, der Nordpol hinter demselben, so ist der Fleck nach unten verschoben, bei umgekehrter Stellung der Pole nach oben. Fällt er dabei auf die Electrode *k*, so wird er unsichtbar. Am grössten ist die Verschiebung des Fleckes, wenn der Magnet zwischen dem Diaphragma *a* und dem Fenster an das Rohr gehalten wird. Der Fleck wandert dann bis ziemlich nahe an *a* heran, und gleichzeitig concentrirt sich die Glasphosphoreszenz vor dem Diaphragma mehr nach derselben Seite hin, auf welcher sich der Fleck befindet.

Nach Hinwegschaffung des grösseren Theiles der trüben Luft sind demnach die Strahlen nahezu geradlinig geworden und haben sich auf viel grössere Strecken — 30 cm — fast ohne Schwächung der Intensität fortgepflanzt. Ihr Verhalten, auch gegen den Magneten, war ganz dasjenige, welches bei gleicher Verdünnung die Kathodenstrahlen in gewöhnlichen Entladungsrohren charakterisirt.

Das Hauptinteresse des Versuches liegt nun darin, ob bei weiterem Evacuiren des Beobachtungsraumes eine Umkehr eintreten wird, wie sie eintreten würde wenn das Entladungsrohr weiter evacuirt würde, ob nämlich die Glasphosphoreszenz an Intensität wieder abnehmen und schliesslich verschwinden wird, oder ob nicht. Schliessen wir daher jetzt das Entladungsrohr von der Pumpe ab und evacuiren den Beobachtungs-

1) Dass es hier, so wie auch stets in allen folgenden Versuchen leuchtet, ist in Uebereinstimmung mit der früher (4) gegebenen Erklärung seines Leuchtens.

2) Von diesem Leuchten wird später (17) gezeigt, dass es in keinem directen Zusammenhange mit den Kathodenstrahlen steht.

raum allein weiter. Gleichzeitig verbinden wir das Inductorium jetzt mit den Electroden *a* und *k* des Beobachtungsraumes, um zu sehen, ob hier wirklich die Verdünnung erreicht wird, bei welcher jene Umkehr eintritt. Erst nach vielen Stunden ist die mit Einsetzen der Entladungen beginnende Gasabgabe soweit beendet, dass das helle Anschlagen des Quecksilbers an den Hahn der Pumpe äusserste Verdünnung anzeigt. Gleichzeitig beginnt die Entladung zwischen *a* und *k* auszusetzen, die Glasphosphorescenz unter der Kathode *k* blitzt nur ab und zu und nur stellenweise auf und bald darauf findet der Ausgleich nur mehr aussen statt, in Funken die sich längs der Glaswand zwischen *a* und *k* verzweigen. Der Beobachtungsraum ist jetzt soweit evacuirt, dass jene Umkehr eingetreten ist, dass es unmöglich ist, in ihm Kathodenstrahlen zu erzeugen. Verbinden wir nun das Inductorium wieder in der gewohnten Weise mit dem Entladungsrohre, so sind trotzdem die Erscheinungen im Beobachtungsraume unverändert die früheren. Nur das blaue Leuchten der Luft zwischen den Electroden fehlt jetzt, das Innere des Beobachtungsraumes erscheint ganz dunkel; der Phosphoreszenzfleck am Ende des Rohres kann deshalb um so leichter beobachtet werden. Er ist vielleicht etwas schärfer begrenzt als früher, gewiss aber nicht weniger hell. Auch zwischen Diaphragma und Fenster leuchtet das Glas auch jetzt sehr hell. Die Ablenkung durch den Magneten ist der Richtung und der geschätzten Grösse nach ebenfalls unverändert.

Ist es also auch nicht möglich, Kathodenstrahlen in diesem Vacuum zu erzeugen, so ist dasselbe doch für ihre Ausbreitung kein Hinderniss. Sie haben auch keine merkbaren Gasmengen mit sich in den Beobachtungsraum gebracht; das Vacuum in demselben erweist sich nach dem Versuche als vollkommen unverändert, indem sowohl die Entladung zwischen *a* und *k* wieder versagt, als auch der Klang des Quecksilbers in der Pumpe der frühere ist.

13. Noch vollkommener und mit gleichem Erfolge kam derselbe Versuch in folgender Weise zur Ausführung. Zunächst liess die Helligkeit der eben beobachteten Glasphosphorescenz Strahlen von Meterlänge erwarten. Das Glasrohr, welches den Beobachtungsraum umschliesst, wurde deshalb jetzt 1,5 m

lang genommen, bei 2,5 cm Weite (Fig. 10). Es ist mit Fenster versehen und mit dem Entladungsrohre verbunden, genau wie vorhin; nur hat das Fenster jetzt nahezu doppelte Dicke (0,0045 mm, statt 0,0027 mm wie gewöhnlich), es schliesst wieder vollkommen luftdicht. Ferner ist das Beobachtungsrohr mit Ausschluss irgend welcher Schliffe oder Hähne an eine Töpler-Hagen'sche Pumpe geblasen; das verbindende Rohr ist 1 cm weit. Die Geissler'sche Pumpe bedient jetzt das Entladungsrohr allein. Um störende Reflexion der Kathodenstrahlen an dem etwas langen, verengten Theile des Beobachtungsrohres (nächst dem Fenster) auszuschliessen, sind zwei Diaphragmen aus Zinkblech, d_1 und d_2 , mit 3 mm weiten centralen Oeffnungen in 6 bez. 12 cm Entfernung vom Fenster dauernd im Beobachtungsrohre befestigt. Es kommt so bloss ein schmales Strahlenbündel zu Stande, welches in der Axe des Rohres verläuft und dessen Wände erst in der Nähe des Endes trifft. Aus diesem Bündel sondert das bewegliche Zinkblech-Diaphragma D , mit 2,1 mm weiter Oeffnung, noch schmalere Strahlen ab, welche auf dem ebenfalls verschiebbaren phosphorescenzfähigen Schirme S als helle kreisförmige Flecke zur Beobachtung gelangen. Das bewegliche Diaphragma D zeigt Fig. 10a in nat. Gr. (perspectivisch); sein Fuss ee ist ein gebogenes Stück Eisenblech, es kann daher durch einen Magneten von aussen her beliebig im Rohre verschoben werden und ebenso ist der phosphorescenzfähige Schirm¹⁾ eingerichtet.

Nachdem der Beobachtungsraum ausgepumpt und die Glaswände durch wiederholtes Erhitzen vom grösseren Theile der verdichteten Gase befreit worden waren — was mehrere Tage in Anspruch nahm — zeigten sich in der Pumpe, trotz viertelstundenlangem Wartens von einem Pumpenzug zum nächsten, nur mehr Gasbläschen, die zu klein waren um den Querschnitt des Capillarrohres auszufüllen, in welches sie aus

1) Pentadecylparatolyketonpapier (4). Diese organische Substanz konnte ohne Bedenken angewendet werden, da besondere Versuche zeigten — und der nun zu beschreibende wird es bestätigen — dass die von der electrischen Entladung abgesonderten Kathodenstrahlen die sonst gewohnten, mit Gasentwicklung verbundenen Zersetzungen nicht veranlassen.

dem Pumpengefäße gelangen. Eine Zeit lang gelang es noch diese kleinen Bläschen durch Kunstgriffe bis in die Erweiterung des Capillarrohres¹⁾ zu befördern, alsdann hatte die Wirksamkeit der Pumpe ihre Grenze erreicht.

Auch diese Verdünnung nun, welche sicherlich noch höher war als die im vorigen Versuche erreichte, war der Ausbreitung der Kathodenstrahlen kein Hinderniss. Sie waren hier in besonderer Reinheit, Intensität und Schärfe zu beobachten. Während die Wände des Beobachtungsrohres von d_1 ab, und das Innere desselben, vollkommen dunkel blieben, waren die Phosphoreszenzflecke am Schirme sehr hell und bei allen Stellungen des Diaphragmas (D) und Schirmes (S) von derjenigen Grösse und Schärfe, die man hätte erwarten müssen, wenn Licht wirksam gewesen wäre, ausgestrahlt von einer dem Fenster an Grösse gleichen Fläche. Nur die starke Verschiebbarkeit der Flecke durch den Magneten zeigte an, dass Letzteres in Wirklichkeit nicht der Fall war. Als Beispiel seien hier die Durchmesser der Phosphoreszenzflecke zusammengestellt, wie sie im Mittel gemessen wurden, als das Diaphragma 50 cm weit vom Fenster abstand (wie in Fig. 10 gezeichnet):

Tabelle I.

Entfernung des Schirmes vom Fenster	Durchmesser des Phosphorfleckes	Berechneter Durchmesser
cm	mm	mm
60	2,5	2,9
70	2,5	3,6
80	3,0	4,4
90	4,8	5,1
100	5,3	5,9
110	6,0	6,7
120	7,0	7,4
130	8,0	8,2
140	7,8	8,9
150	10,0	9,7

Neben die Durchmesser der beobachteten Phosphoreszenzflecke sind als dritte Verticalreihe die nachher unter der

1) Vgl. über diese Erweiterung, welche eine wesentliche Verbesserung der Pumpe ist, Raps, Wied. Ann. 43. p. 636 und Taf. VI, Fig. 2, R. 1891.

Annahme geradliniger Ausbreitung berechneten Durchmesser gesetzt, die Durchmesser also derjenigen Kreisflächen, zu deren Punkten gerade Linien von mindestens einem Punkte der Fensterfläche (von 1,7 mm Durchmesser) durch die Diaphragmenöffnung (von 2,1 mm Durchmesser) führen¹⁾. Man sieht, dass die beobachteten Phosphoreszenzflecke fast sämtlich etwas kleiner sind als die berechneten, ein Umstand, welcher aus der allmählich gegen Null sinkenden Intensität am Rande der Flecke erklärlich ist und welcher, wie ich mich überzeugt habe, auch bei der Ausmessung von Lichtflecken unter gleichen Bedingungen auftritt. Im vollständigen Vacuum unterscheidet sich also die Ausbreitung der Kathodenstrahlen nicht bemerkbar von der geradlinigen.

Es ist zu bemerken, dass die Phosphoreszenzflecke nicht immer centrisch auf dem Schirme erschienen, ja dass sie manchmal erst durch Annäherung eines Magneten auf den Schirm gebracht werden mussten. Dies kann indessen nicht überraschen, sobald bemerkt wird, dass die eisernen Füße des Diaphragmas und Schirmes im Gebrauche wechselnden permanenten Magnetismus annahmen, wie Untersuchung mit einer Magnetnadel ergab.

Auch in diesem Versuche wurde darauf geachtet, ob der fortgesetzte Durchgang der Kathodenstrahlen etwa Zunahme des Gasdruckes im Beobachtungsraume zur Folge hat, ohne dass eine solche hätte bemerkt werden können. Das Volumen der kleinen Gasbläschen, zu welchen der 1140 cm³ betragende Inhalt des Pumpengefässes zusammenschrumpft, wurde nach wie vor auf 1 mm³ geschätzt, wenn eine Quecksilbersäule von 10 mm Höhe über diesen Bläschen stand, welche andererseits an die barometrische Leere grenzte.

Der Gasdruck, welcher in diesem Versuche im Beobachtungsraume noch übrig blieb, berechnet sich hiernach zu 0,000009 mm Quecksilber oder $0,01 \cdot 10^{-6}$ Atmosphäre. Vielmal grösser, 0,001 mm, wäre der Druck des aus der Pumpe stammenden Quecksilberdampfes bei Zimmertemperatur ge-

1) Die Durchmesser derjenigen kleineren Kreise, zu deren Punkten gerade Linien von allen Punkten des Fensters führen, würden von oben nach unten in der Tabelle von 2,2 mm bis 2,9 mm zunehmen.

wenn er so weit vom Fenster entfernt ist, dass er in reiner Luft eben schon dunkel bleibt. Soll er bei ausströmendem Leuchtgas wieder dunkel werden, so muss er weiter vom Fenster entfernt werden. Die Durchlässigkeit dieses für ultraroths wie für ultravioletes Licht so undurchlässigen Gases war überraschend.

Erfüllt man den ganzen Beobachtungsraum mit dem zu prüfenden Gase, so werden die Versuche reiner und die Grenz-entfernung des Schirmes vom Fenster, in welcher sein Leuchten eben aufhört, gibt dann ein relatives Maass für die Durchlässigkeit des untersuchten Gases. Zur Ausführung solcher Versuche ist das Glasrohr *RR*, Fig. 8, von 40 cm Länge und 3 cm Weite an die Fensterwand *mm* gekittet. Am entgegengesetzten Ende verschliesst es ein Stopfen mit zwei Bohrungen, durch welche ein kurzes und langes Glasrohr gehen, wie die Figur zeigt. Die schwereren Gase werden durch die untere (kurze), die leichteren durch die obere (lange) Röhre eingelassen, bis sie die Luft vollständig verdrängt haben; von da ab, während des Versuches strömen alle Gase durch die lange Röhre ein, um umso sicherer reines Gas zwischen Fenster und Schirm zu haben. Der Schirm *S*¹⁾ ist wieder magnetisch verschiebbar (13), Fig. 8a zeigt ihn in natürlicher Grösse vom Fenster aus gesehen. Er ist an dieser Seite ganz mit Aluminiumblatt überzogen, um alle Täuschung durch Licht, insbesondere durch das Phosphoreszenzlicht des Glasrohres auszuschliessen. Ueber die Aluminiumbekleidung ist noch der undurchlässige Glimmerstreifen *gg* gelegt. Der Schirm wird von der unbelegten, dem Fenster abgewandten Seite beobachtet und solange abwechselnd verschoben und bestrahlt, bis der schwarze Schatten des Glimmerstreifens, und damit die Erleuchtung des Schirmes überhaupt, eben gerade verschwunden ist. Diese Grenzstellung ist mit überraschender Schärfe aufzufinden; 1 mm näher an das Fenster gerückt, zeigen sich schon Spuren des Glimmerschattens am Schirme.

Voraussetzung für vergleichbare Resultate ist natürlich constante Anfangsintensität der aus dem Fenster tretenden Kathodenstrahlen, also Constanz der Erzeugungsbedingungen.

1) Pentadecylparatolyketonpapier.

Unter diesen bedarf das Vacuum im Entladungsrohre besonderer Aufmerksamkeit¹⁾; es wurde so regulirt, das zwischen den jetzt beständig auf 3 cm Abstand gestellten Kugeln *B*, Fig. 1, stets ab und zu Funken übersprangen. Dies gilt auch für alle noch folgenden Versuche, wo nichts anderes bemerkt ist.

Die Entfernungen des in seine Grenzstellung gebrachten Schirmes vom Fenster, abgelesen an einem am Rohre befestigten getheilten Papierstreifen, sind nun für die einzelnen Gase hier als „Strahllängen“ verzeichnet (Mittelwerthe):

Tabelle II.

Gas	Dichte	Strahllänge
		cm
Wasserstoff. . .	1	29,5 ²⁾
Stickstoff . . .	14,0	6,5
Atm. Luft . . .	14,4	6,0
Sauerstoff . . .	16,0	5,1
Kohlensäure . .	22,0	4,0
Schweflige Säure.	32,0	2,3

Die Gase sind nach zunehmender Dichte geordnet. Wie man sieht, ist dies zugleich die Ordnung zunehmender Absorption. Grossen Unterschieden in der Dichte entsprechen auch grosse Unterschiede in der Strahllänge und den kleinen Dichtenunterschieden zwischen Stickstoff, atmosphärischer Luft und Sauerstoff entsprechen nur kleine Unterschiede. Dass diese kleinen Unterschiede aber wirklich bestehen, davon habe ich mich durch wiederholte Vergleichung der drei Gase überzeugt. Auch das Leuchtgas fügte sich in die Ordnung, indem es viel längere Strahlen entstehen liess als Stickstoff, aber längst nicht so lange wie Wasserstoff. Ob atmosphärische Luft von Staub,

1) Die electromotorische Kraft der Accumulatoren, welche das Inductorium speisten, war sehr constant, sie wurde in regelmässigen Intervallen durch eine Glühlampe controlirt.

2) In meiner ersten Mittheilung, Berl. Ber. 1893 p. 7, ist diese Länge zu nur 20 cm angegeben. Ich hatte damals noch nicht so sehr auf constante Anfangsintensität geachtet. Unter den oben angegebenen Vorsichtsmassregeln habe ich bei öfterer Wiederholung des Versuches mit stets erneuten Wasserstofffüllungen nie wieder so geringe Längen erhalten.

Kohlensäure und Wasserdampf befreit war oder nicht, ob sie im Beobachtungsraume ruhte oder durch ihn strömte, alles dies machte keinen bemerkbaren Unterschied.

Sämmtliche Gase wurden durch die Kathodenstrahlen auch erleuchtet, ähnlich der Luft (3). Das Licht beschränkt sich auch hier auf die Nähe des Fensters und reicht z. B. in Wasserstoffgas längst nicht so weit als die Phosphoreszenzwirkung am Schirme; in Kohlensäure und schwefeliger Säure ist das Lichtbüschel sehr klein, dafür etwas heller als in den weniger absorbirenden Gasen. Farbenunterschiede habe ich bei den verschiedenen Gasen nicht wahrgenommen, doch ist hierfür der Apparat auch ungeeignet, wegen der hellen Phosphoreszenz der Glaswände. Das viel besser sichtbare Leuchten des Fensters selbst war stets unverändert das gleiche, in Uebereinstimmung mit der früher (4) gegebenen Erklärung desselben. Die Aluminiumbekleidung des Schirmes blieb in allen Abständen und Gasen dunkel.

16. Mit zunehmender Verdünnung wächst die Durchlässigkeit der Gase; bei sehr starker Verdünnung verschwinden die Unterschiede zwischen verschiedenen Gasen. — Wir beurtheilen die Durchlässigkeit wieder nach der Strahllänge, haben aber den Beobachtungsraum zum Evacuiren eingerichtet und sehr viel länger und auch weiter gemacht, Fig. 11. Das $1\frac{1}{2}$ m lange, 4.5 cm weite Glasrohr *RR* ist einerseits in die an die Fensterwand gelöthete Hülse *hh* gekittet, andererseits durch eine Metallkapsel *kk* verschlossen; ein Ansatzrohr führt zur Töpler-Hagen'schen Pumpe. (Das Entladungsrohr ist wie stets mit der Geissler'schen Pumpe verbunden). Von diesem Ansatzrohre zweigt noch ein anderes Rohr ab (in der Figur nicht erscheinend), welches in einen Quecksilberhahn (den unteren Theil eines Bottomley'schen Verbindungsstückes)¹⁾ endet, so dass Beobachtungsraum sammt Pumpe sowohl von der Luft abgeschlossen, als auch ohne Luftzutritt mit Gasentwicklungsapparaten verbunden werden können. Alles schliesst dicht genug, um die unten angegebenen hohen Verdünnungen dauernd zu halten. Der phosphoreszenzfähige Schirm *S* ist ganz wie vorher beschaffen, nur musste sein

1) Bottomley, Proc. Roy. Soc. 40. p. 249. 1886.

Aluminiumüberzug jetzt besonders dick genommen werden, damit der nur $1\frac{1}{2}$ m lange Beobachtungsraum auch für die höheren Verdünnungen ausreiche; es kommt dies der Anwendung eines weniger hell phosphorescirenden Schirmes gleich. Die Bekleidung besteht aus vier Aluminiumfolien von zusammen 0.0133 mm. Dicke (fünffache Fensterdicke, 38 fache Blattaluminiumdicke), über dieselbe ist wieder ein schattenwerfender Steg befestigt.

Indem wir nun den Beobachtungsraum von Stufe zu Stufe evacuiren, die Grenzstellung des Schirmes jedesmal aufsuchen und seine Entfernung vom Fenster als Strahllänge notiren, erhalten wir — für Luft und Wasserstoff — folgende Tabelle ¹⁾:

Tabelle III.

Atmosphärische Luft		Wasserstoff	
Druck ²⁾	Strahllänge	Druck ²⁾	Strahllänge
mm	cm	mm	cm
760	2,35	760	10,6
331	4,53	335	21,1
165	8,38	167	32,4
83,7	12,1	88	38,8
40,5	17,1	42,2	56,1
19,3	27,2	20,3	74,9
10,0	49,5	10,3	96,8
2,7	73,0	3,3	122
0,78	107	0,65	125
0,074	127	0,065	126
—	—	0,030	131
0,019	140	0,0164	130
0,0083	133	—	—

Man sieht erstens, dass die Strahllänge, also die Durchlässigkeit, bei Luft sowohl als bei Wasserstoff mit abnehmendem Druck regelmässig und stark zunimmt, zweitens aber auch, dass sie bei beiden Gasen schliesslich dieselbe Grenze erreicht. Solange der Gasdruck noch nach Millimetern Quecksilber zählt,

1) Die Funkenlänge (B Fig. 1), welche die Verdünnung im Entladungsrohr bemisst, war hier constant = 2.8 cm.

2) Zur Druckmessung bietet die Töpler-Hagen'sche Pumpe vielfache Wege. Die grösseren Drucke ergeben sich direct, die kleineren nach Calibration des Pumpengefässes und der Röhren unter Anwendung des Mariotte'schen Gesetzes.

macht sich die grössere Durchlässigkeit des Wasserstoffgases stets stark bemerkbar (annähernd gleiche Drucke sind in der Tabelle nebeneinandergesetzt); ist der Druck aber zu Hundertel-millimetern herabgesunken, so ist der Unterschied zwischen den beiden Gasen verschwunden und gleichzeitig wird weiteres Evacuiren einflusslos. Die Unterschiede der in den vier letzten Zeilen der Tabelle enthaltenen Strahllängen sind nicht grösser als ihre Unsicherheit, welche ich nach der Uebereinstimmung der einzelnen Messungen, deren Mittelwerthe die Tabelle enthält, auf ± 5 Proc. schätze.¹⁾ Offenbar sind diese letzteren Strahllängen nicht mehr durch die verschwindend klein gewordene Absorption des Gasrestes bestimmt, sondern das Unmerkbarwerden der Strahlen in den angegebenen Entfernungen hat hier seinen Grund allein in ihrer allseitigen geradlinigen Ausbreitung vom Fenster aus, infolge welcher ihre Intensität abnimmt wie das reciproke Entfernungsguadrat.

Auch bei anderen Gasen wird es sich bestätigen (18), dass die Durchlässigkeit mit abnehmendem Drucke zunimmt, während die Unterschiede zwischen den verschiedenen Gasen verschwinden.

Wie ausserordentlich stark absorbirend Luft und selbst auch Wasserstoffgas von gewöhnlichem Drucke ist, lehrt Vergleichung der untersten mit den obersten Zeilen der Tabelle: 130 cm Strahllänge im Vacuum und nur 2 cm in Luft, 10 cm in Wasserstoff. Quantitative Schlüsse, welche sich hieran knüpfen, bleiben passender auf eine besondere, der Absorption zu widmende Mittheilung verspart; es sei jedoch gestattet, hier die Beobachtungen einzuschalten, welche eine Voraussetzung solcher Schlüsse erweisen, die nämlich, dass die Strahllängen der Tabelle nicht merkbar beeinflusst sind durch die Anwesenheit der Glaswände des Beobachtungsraumes, dass sie vielmehr auch in vollständig freiem Beobachtungsraume nicht anders erhalten worden wären. Ein Einfluss der Rohrwände ist denkbar aus zwei Gründen. Erstens können die Wände

1) Diese verhältnissmässig grosse Unsicherheit liegt nicht im Auffinden der Grenzstellung des Schirmes, sondern sie hat ihren Grund in der auch bei sonst constant gehaltenen Erzeugungsbedingungen noch immer mit dem Zustande des Quecksilberunterbrechers periodisch etwas wechselnden Anfangsintensität der Kathodenstrahlen.

bei krummliniger Ausbreitung der Strahlen den Schirm dunkler erscheinen lassen, als wenn sie nicht vorhanden wären, denn sie schneiden einen Theil der krummlinigen Bahnen vom Fenster nach dem Schirme ab. Zweitens können die Wände den Schirm aber auch aufhellen, durch Reflexion der Kathodenstrahlen. Die erste Wirkung ist nur bei höheren Gasdrucken zu erwarten (vgl. w. u. 18), die zweite müsste sich daher am reinsten bei den niedrigsten Drucken zeigen. Um über das Vorhandensein eines merkbaren Einflusses zu entscheiden, wurde zwischen Fenster und Schirm¹⁾ eine verschiebbare Aluminiumblechblende Fig. 11 a eingeschaltet, welche, ziemlich dicht an die Rohrwand schliessend, eine centrale Oeffnung von 17 mm Weite, also weniger als der halben Rohrweite, freiliess. Es befand sich diese Blende zunächst dicht am Fenster, wo sie ganz unwirksam sein muss, und es sei der Schirm in die Nähe seiner Grenzstellung gebracht, sodass er eben noch deutlich aufleuchtet. Schieben wir nun die Blende näher und näher an den Schirm heran, so schneiden wir mehr und mehr krummlinige Bahnen vom Fenster nach dem Schirme ab. Trotzdem zeigt sich vorerst noch keine merkbare Verdunkelung desselben. Erst wenn die Blende mehr als den halben Weg vom Fenster zum Schirme zurückgelegt hat, sodass sie nun auch geradlinige Bahnen abzuschneiden beginnt, verdunkelt sie den Schirm am Rande. Der Versuch wurde mit gleichem Erfolge ausgeführt in Luft von 117 mm, 15 mm, 2,8 mm und 0.035 mm Druck. Bei den drei höheren Drucken war die Verdunkelung des Schirmrandes verwaschen, bei dem niedrigsten erschien ein fast scharfer, ringförmiger Schatten der Blende. Dieser Versuch zeigt, bei den höheren Drucken, dass krummlinige Strahlen (obgleich wirklich vorhanden) nicht merkbar zur Wirkung kommen auf dem in seiner Grenzstellung befindlichen Schirm. Beim niedrigsten Drucke, wo die Strahlen schon geradlinig sind, zeigt der Versuch, dass auch reflectirte Strahlen sich nicht bemerkbar machen. Denn befindet sich die Blende mitten zwischen Fenster und Schirm, so beschattet sie den hinter ihr, bis zum Schirme liegenden Theil der Rohrwand (was auch an der Abwesenheit der Glasphosphoreszenz

1) Die Aluminiumbekleidung desselben war hier dünner als oben angegeben, was indessen den Versuch nicht weniger beweisend macht.

daselbst zu erkennen ist), sodass dieser überhaupt nicht reflectiren kann, zugleich aber verhindert sie sämtliche Strahlen, welche vom nicht beschatteten, gegen das Fenster zu liegenden Theile der Rohrwand reflectirt werden, nach der Mitte des Schirmes zu gelangen; trotzdem erscheint die Mitte desselben nicht verdunkelt, nur der Rand weist den Schatten der Blende auf. Die genannte Voraussetzung ist somit erwiesen.¹⁾

17. Gase werden durch die Kathodenstrahlen um so weniger erleuchtet, je verdünnter sie sind. — Bei Ausmessung der Strahllängen in Luft und Wasserstoffgas wurde noch Folgendes beobachtet: Das früher (3, 15) beschriebene Leuchten der beiden Gase bei Atmosphärendruck nimmt bei fortschreitender Verdünnung rasch an Helligkeit ab und zugleich an Ausdehnung zu, wie zu erwarten nach unserer Auffassung dieses Leuchtens als einer Folge der Absorption der Strahlen im Gase. Die Längen der durchleuchteten Strecken sind nicht genau angabbar, denn das an sich matte Leuchten nimmt stets vom Fenster aus allmählich ab, doch waren sie vergleichbar mit den Strahllängen (Tab. III). Während das Leuchten des Gases schwächer wird, wird die Glasphosphoreszenz des Rohres heller; schon bei etwa 50 mm Druck (Luft wie Wasserstoff) wird das erstere neben der letzteren unmerkbar. Das Innere des Rohres erscheint jetzt dunkel und bleibt es auch, bis der Druck auf etwa 2 mm gesunken ist. Bei dieser Verdünnung fängt das Gas an von neuem zu leuchten, viel heller als vorher und in ganz anderer Weise. Das Licht geht nicht mehr vom Fenster aus, sondern von den zwei Metallklammern, welche das Beobachtungsrohr halten. Zuerst in deren Umgebung, dann, bei weiterer Verdünnung, der ganzen Länge nach ist das Rohr von einer röthlichen (manchmal finde ich „bläulich“ notirt), ziemlich hellen Lichtsäule erfüllt. Leiter in der Nähe des Rohres haben Einfluss auf die Vertheilung dieses Lichtes. Umfasst man

1) Vgl. hier auch den Versuch mit der Stanniol- und Glasröhre (4). Die Unwirksamkeit krummliniger und reflectirter Strahlen ist natürlich in Obigem nur für Grenzstellungen des Schirmes erwiesen, worauf es allein ankam. Das Resultat ist vielleicht auch gar nicht überraschend, denn in Entfernungen vom Fenster, in welchen die Wirkung geradliniger Strahlen schon unmerkbar wird, ist Wirkung von Strahlen, welche durch krummlinige also noch längere Bahnen im Gas oder durch Reflexion geschwächt sind, noch weniger zu erwarten.

z. B. das Rohr an einer Stelle mit der Hand, so endet die Lichtsäule gewöhnlich an dieser Stelle und der übrige Theil des Rohres bleibt lichtlos. Dies wurde benutzt bei den vorhergehenden, wie bei den noch folgenden Versuchen (16, 18, 20), wenn es darauf ankam, den Schirm zur Beobachtung vor fremdem Lichte zu schützen; die Phosphoreszenzen an Schirm und Glaswand werden durch die Hand oder andere Leiter nicht beeinflusst. Dieses Licht bleibt bis zu sehr geringen Drucken bestehen; dass es im äussersten Vacuum wieder verschwindet, ist oben (12, 13) bemerkt. Dieses Leuchten des Gases steht in keiner engeren Beziehung zu den Kathodenstrahlen. Denn erstens verlischt es nicht nothwendig¹⁾, wenn die Kathodenstrahlen vom Beobachtungsraume abgehalten werden, sei es durch Heranschieben des Schirmes an das Fenster, sei es durch einen Magneten am Entladungsrohr. Zweitens verschwindet die Lichtsäule stets und vollständig, wenn das Beobachtungsrohr seiner ganzen Länge nach mit Drahtnetz umhüllt wird, welches die Fensterwand und die Metallkapsel *kk* leitend berührt. Die Phosphoreszenz der Glaswand und des Schirmes, sowie auch das Leuchten des Fensters sind dagegen unverändert auch in der Hülle vorhanden, ebenso die magnetische Ablenkbarkeit von Strahlen, welche durch ein Diaphragma abgesondert sind (s. w. u., 18). Das Gas ist also bei den niedrigen Drucken nicht durch die Kathodenstrahlen erleuchtet, sondern durch dieselben, von der Erzeugung stammenden, electricischen Kräfte, welche bei gewöhnlichem Drucke im Beobachtungsraume die Fünkchen (10) bildeten. Dementsprechend tritt die Lichtsäule auch dann auf, wenn in einem benachbarten, aber von unserem Apparate ganz abgesonderten Entladungsrohre Kathodenstrahlen erzeugt werden. Dass das ersterwähnte, der Durchstrahlung zuzuschreibende Leuchten des Gases auch bei Ausschluss der electricischen Kräfte vorhanden ist, wurde, für Luft von gewöhnlichem Druck wenigstens, schon früher (10) gezeigt.

Auch in anderen Gasen wurden — in späteren Ver-

1) Manchmal verlischt es. Die Kathodenstrahlen scheinen das Zustandekommen der Lichtsäule zu unterstützen. Man wird dies in Zusammenhang damit bringen, dass die Kathodenstrahlen den Beobachtungsraum leitend machen (11).

suchen (18) — im wesentlichen dieselben Lichterscheinungen beobachtet, wie in Luft und Wasserstoff.

Als von Kathodenstrahlen erleuchtetes Gas ist auch das negative Glimmlicht in Geissler'schen Röhren aufzufassen.¹⁾ Zwischen dieser Erscheinung und dem hier beobachteten und der Durchstrahlung zugeschriebenen Leuchten besteht auch Uebereinstimmung insofern, als hier wie dort das Licht bei starker Verdünnung fehlt, bei zunehmendem Drucke erst schwach und ausgedehnt erscheint, dann heller und kleiner wird. Während aber das Glimmlicht im Geissler'schen Rohre schon bei $\frac{1}{2}$ mm Druck sehr hell und klein geworden ist, bleibt das Gas in unseren Versuchen selbst bis zu 760 mm Druck noch immer viel dunkler, und doch die durchleuchtete Strecke viel grösser. Dieser Unterschied kann daher nicht auf geringere Intensität der hier benutzten Strahlen zurückgeführt werden; er wird dagegen erklärt sein, sobald sich zeigen lässt, dass man bei höherem Druck Kathodenstrahlen anderer Art erzeugt, welche von Gasen viel stärker absorbiert werden als die hier untersuchten, bei sehr niedrigem Drucke erzeugten Strahlen.

18. Verschiedene Gase sind in sehr verschiedenem Grade trübe Medien; mit grösserer Durchlässigkeit ist stets auch grössere Klarheit verbunden. — Um die Ausbreitungsweise der Kathodenstrahlen in verschiedenen gasförmigen Medien zu studiren, beobachten wir den Verlauf von Strahlenbündeln, welche durch ein Diaphragma abgesondert, auf einem Schirme als Phosphoreszenzflecke sich abbilden. Wir benutzen wieder das Beobachtungsrohr Fig. 11. Das Diaphragma lässt nur eine kreisförmige, scharfkantige, centrale Oeffnung von 1,9 mm Durchmesser frei; es gleicht auch im übrigen dem in Fig. 10a abgebildeten. Der Schirm ist jetzt unbedeckt; um die Ausmessung der Phosphoreszenzflecke zu erleichtern, ist er an der dem Fenster abgewandten Seite, von welcher er beobachtet wird²⁾, mit schwarzen Papierstückchen von genau

1) Vgl. z. B. Hertz, Wied. Ann. 19. p. 807 u. ff. 1883.

2) Beobachtungen von der anderen Seite ergab dasselbe (der Schirm besteht aus Pentadecylparatolyketonpapier). Ein Theil der Versuche wurde auch mit aluminiumbelegten Schirm wiederholt; Aussehen und Grösse der Flecke war durch das eng anliegende einfache Blattaluminium nicht im geringsten verändert. Dies gibt die Sicherheit, dass auch bei unbelegtem Schirme Täuschung durch Licht nicht vorlag.

bemessenen Dimensionen und Abständen beklebt, wie es Fig. 11 b zeigt. Fällt der Fleck ungünstig zur Messung auf diese Scale, so verschieben wir ihn durch Annäherung eines Magneten. Dies gibt zugleich die Gelegenheit, festzustellen, dass alle beobachteten Strahlen in der für Kathodenstrahlen charakteristischen Weise ablenkbar sind. Der aus dem Diaphragma kommende Strahl verläuft unsichtbar im Gase, ganz hohe Drucke ausgenommen, wie nach Vorhergehendem nicht anders zu erwarten; auch die Glaswand bleibt hinter dem Diaphragma dunkel, nur vor demselben, bis zum Fenster, leuchtet sie grün.

Was am phosphorescenzfähigen Schirme beobachtet wurde, lässt sich nicht besser darstellen als es in den Fig. 6 und 12 graphisch geschehen ist. Jede einzelne Darstellung, z. B. Fig. 6 Nr. 1 ist als Schnitt durch die Axe des Strahles und des Beobachtungsrohres aufgefasst. mm ist die Fensterwand mit dem Fenster F (den Maasstab siehe unten in der Figur), mR sind die Rohrwände, DD das Diaphragma; ss ist je eine untersuchte Stellung des Schirmes. Die Helligkeitsvertheilung in den Phosphorescenzflecken ist nun durch kleine Curven, z. B. sab , dargestellt in der Weise, dass die horizontale Entfernung von jedem Schirmpunkte bis zur Curve die daselbst beobachtete Phosphorescenzhelligkeit in willkürlichem, aber für alle Figuren möglichst gleichem Maasse nach Schätzung angibt. Die Darstellung ist also die für Spectrallinien übliche; sie gibt die Lichtvertheilung längs eines Durchmessers des Fleckes und durch Umdrehung um die Strahlaxe im ganzen Flecke. Der besseren Anschaulichkeit halber sind dann noch sämtliche Flecke eines Strahles sammt der Diaphragmenöffnung durch die horizontal verlaufenden Curven xy verbunden, welche also ein Bild des Strahles geben, obgleich derselbe, wie die Flecke zeigen, in den meisten Fällen durchaus nicht scharf begrenzt war. Die Strahlen sind stets soweit fortgesetzt, als sie überhaupt noch einigermaassen deutlich begrenzte Flecke gaben. Alles Unwesentliche ist bei den weiteren Strahlen weggelassen; FF bedeutet stets die gemeinsame Fensterwand verschiedener zu vergleichender Strahlen.

Betrachten wir nun die Strahlen in Wasserstoffgas, Fig. 6. In Nr. 1 ist ein Strahl in Wasserstoff von gewöhnlichem Drucke dargestellt (vgl. die überall beigeschriebenen Drucke).

Er ist ziemlich schlank, die Ausbreitung ist der geradlinigen viel näher, als in atmosphärischer Luft von gleichem Drucke (vgl. 8 und Fig. 3), wo ein eigentlicher Stahl gar nicht zu Stande kam. Dieser Strahl dagegen ist scharf genug, um deutlich die Ablenkung durch den Magneten zu zeigen. Immerhin ist aber auch Wasserstoffgas — welches sich als das klarste Gas zeigen wird — ziemlich trübe, denn die Phosphoreszenzflecke sind sämtlich sehr viel grösser als sie bei geradliniger Ausbreitung höchstens sein könnten. Die äussersten Grenzen geradliniger Ausbreitung, des geometrischen Strahls, sind durch die gestrichelten Linien xx gegeben (hier und bei allen folgenden Strahlen)¹⁾. Man bemerkt weiter, bei genauerer Betrachtung des ersten Phosphoreszenzfleckes, noch ein anderes für trübe Medien charakteristisches Merkmal. Dieser Fleck besteht nämlich, wie die Curve und Fig. 7a (Helligkeit in Schwärze) zeigt, aus einem sehr hellen Kerne, umgeben von einem weniger hellen Hofe; der Kern sondert sich noch nicht völlig scharf, aber doch ganz deutlich vom Hofe ab. Eine solche Erscheinung ist bei geradliniger Ausbreitung niemals zu beobachten. Weder zeigte sie sich bei Kathodenstrahlen im vollständigen Vacuum in irgend einer Stellung des Diaphragmas oder Schirmes, noch zeigt sie sich bei Licht. Ersetzen wir das Fenster durch eine gleichgrosse beleuchtete Oeffnung, den phosphoreszenzfähigen Schirm durch einen Papierschirm, so erhalten wir mit demselben Diaphragma unter allen Umständen nur mehr oder weniger scharf begrenzte Flecke, in denen sich niemals ein Kern von einem Hofe sondert. Einschieben eines Glastroges mit verdünnter Milch zwischen Fenster und Diaphragma oder zwischen Diaphragma und Schirm liefert dagegen sofort Kerne mit Höfen. Die Kerne sind von gleicher Grösse wie die Lichtflecke ohne Milch, entsprechen also geradlinigen Strahlen, die Höfe diffusen. In Uebereinstimmung hiermit muss die Milch zu diesem Versuche so weit verdünnt

1) Diese Linien würden also, über die Diaphragmenränder xx hinaus verlängert, erst sich schneiden und dann die Ränder des Fensters treffen. Wegen Kleinheit des Maassstabes sind sie nicht durch Construction, sondern nach Rechnung eingetragen. Die (nicht eingetragenen) Linien, welche Fenster und Diaphragma verbinden ohne sich zwischen beiden zu schneiden, würden nahezu parallel miteinander verlaufen.

sein, dass man neben diffuser Helligkeit auch eben schon scharfe Bilder heller Gegenstände durch den Trog sehen kann. Auch bei den Kathodenstrahlen im Wasserstoffgas ist der Kern des Phosphoreszenzfleckes von der Grösse, welche geradliniger Ausbreitung entspricht¹⁾, nur der Hof greift über den geometrischen Strahl (xz) hinaus. Die diffusen Strahlen machen hier nur einen geringen Bruchtheil der gesammten Strahlen aus, denn der Hof ist lichtschwach im Vergleich zum Kerne. Schieben wir nun aber den phosphoreszenzfähigen Schirm weiter vom Fenster weg, so beobachten wir, wie der Kern dunkler, der Hof heller wird, so dass alsbald die Grenze zwischen beiden verschwindet (vgl. den zweiten Fleck in Fig. 6, Nr. 1); der Kern wird gleichsam vom Hofe aufgezehrt. Es werden auf dem länger werdenden Wege durch das trübe Medium immer mehr und mehr Strahlen und um immer grössere Winkel aus der geraden Bahn gelenkt. Infolge dieser fortschreitenden Diffusion verbreitert sich der Strahl immer noch mehr (vgl. die weiteren Phosphoreszenzflecke), die Grenzen der Flecke werden sehr unscharf und bald erscheint des Schirm fast gleichmässig erhellt.

Verringern wir nun den Druck auf 335 mm (Nr. 2) so tritt Aenderung insofern ein, als sämtliche Flecke schmaler, schärfer begrenzt und zugleich heller werden; alles Anzeichen von zunehmender Klarheit. Der Kern des ersten Fleckes sondert sich jetzt vollkommen scharf und sehr auffallend vom zarten Hofe ab; Fig. 7*b* stellt ihn besonders dar. Verringern wir den Druck noch weiter, bis auf 167 mm (Nr. 3), so ist der Hof um den ersten Fleck fast völlig verschwunden. Hier lässt die Figur besonders gut sehen, wie beim Fortrücken des Schirmes der Hof sich ausbildet und weiterhin auf Kosten des Kernes an Helligkeit zunimmt. Der Strahl ist bemerkbar, aber nicht mehr sehr viel, breiter als der geometrische Strahl. Noch mehr hat sich sein vorderer Theil in der folgenden Figur (Nr. 4), bei 88 mm Druck, zusammengezogen. Hier tritt auch zum ersten Male ein ganz scharfer Fleck ohne allen Hof auf²⁾,

1) Anzeichen von theilweise geradliniger Ausbreitung wurden auch in atmosphärischer Luft von gewöhnlichen Drucke bemerkt (s., Fig. 3 u. 3*a*).

2) Sicherlich wären solche Flecke auch bei grösseren Drucken schon entstanden, wenn es möglich gewesen wäre, den Schirm noch näher als 1,5 cm an das Diaphragma heranzuschieben; dies erlaubten die eisernen Füsse nicht.

so dass also in Wasserstoffgas von 88 mm Druck Diffusion längs des 4 cm langen Weges vom Fenster bis zum Schirm noch nicht bemerkbar ist; erst in grösserer Entfernung macht sie sich bemerkbar durch Höfe und dann durch die fächerförmige Ausbreitung des Strahles. Noch klarer wird der Wasserstoff bei 42 mm Druck (Nr. 5). Kerne in den Flecken treten jetzt auch schon in grösseren Entfernungen vom Fenster auf. Die grosse Breite des Strahles scheint jetzt zum grösseren Theile nur mehr durch die geringe Distanz zwischen Diaphragma und Fenster bedingt. Vergrössern wir daher jetzt diese Distanz von 2,5 auf 5 cm, ohne den Druck zu ändern (Nr. 6), so wird der Strahl in der That entsprechend schmaler. Verdünnen wir weiter, bis zu 3 mm (Nr. 7), so unterscheidet sich der Strahl nicht merkbar mehr vom geometrischen Strahle; die gestrichelten Linien fallen in der Figur auf die ausgezogenen und sind deshalb unsichtbar geworden; die Flecke zeigen kaum mehr Höfe. Rücken wir, um die geradlinig gewordene Ausbreitung weiter zu prüfen, das Diaphragma bis zu 10 cm vom Fenster ab (Nr. 8), so wird der Strahl im selben Maasse schmaler wie der geometrische; die Phosphoreszenzflecken ändern sich, wie sich Lichtflecken unter gleichen Umständen ändern würden. Bei 0,67 mm Druck endlich (Nr. 9) scheint hauptsächlich nur die vergrösserte Durchlässigkeit sich merkbar zu machen; der Strahl ist länger geworden und die Flecken heller. Bei genauer Betrachtung bemerkt man indessen, dass jetzt sämtliche Flecke etwas kleiner erscheinen, als geradliniger Ausbreitung entspräche, ganz wie im vollständigen Vacuum und bei Licht beobachtet (13). Das Zusammenfallen der beiden vorigen Strahlen (bei 3 mm Druck, Nr. 7 und 8) mit den geometrischen ist daher als kleines Anzeichen noch vorhandener Trübung zu nehmen.

Auch bei den übrigen Gasen äussert sich Trübung in derselben Weise wie beim Wasserstoffgas, durch Verbreiterung der Strahlen und durch Höfe. Sämmtliche Gase werden mit zunehmender Verdünnung klarer. Bei gleichen Drucken miteinander verglichen zeigt sich Wasserstoff als weitaus das klarste Gas; Stickstoff, Luft und Sauerstoff sind nahezu gleich trübe; Kohlensäure ist trüber, schweflige Säure am trübsten. Das dichtere Gas ist also stets trüber als das weniger dichte und

grossen Dichtenunterschieden entsprechen grosse Unterschiede in der Trübung, kleinen kleine, wie dies alles an Fig. 12 gezeigt werden soll. Wie man sieht, sind Trübung und Absorption (15, 16) unzertrennlich.

In Fig. 12 ist jedem Gase eine Horizontalreihe angewiesen, in welcher der Druck von links nach rechts abnimmt. Die Strahlen in Wasserstoff (erste Zeile) sind Fig. 6 entnommen, aber hier verkürzt. Untereinandergesetzt sind Strahlen, die bei nahezu gleichem Drucke (und gleicher Diaphragmenstellung) erhalten wurden, und der gemeinsame Druck ist in runder Zahl über jede Vertikalreihe gesetzt, während der genaue Druck jedem Strahle besonders beigeschrieben ist. Neben dem Drucke findet man auch die ihm entsprechende Dichte des Gases angegeben, bezogen auf Wasserstoff von 760 mm Druck und Zimmertemperatur.

Bei 180 mm Druck (Verticalr. I) lässt nur Wasserstoffgas einen eigentlichen Strahl zu Stande kommen. Für die Untersuchung so trüber Medien, wie es die übrigen Gase hier sind, war der benutzte Apparat insofern nicht ganz geeignet, als der Schirm nicht nahe genug an das Diaphragma herangeschoben werden konnte, daher ist wohl hier zwischen N_2 , O_2 und CO_2 kein ganz deutlicher Unterschied zu bemerken; nur SO_2 erscheint merklich trüber. Bei 40 mm Druck (Verticalr. II) haben sich sämtliche Gase schon mehr geklärt, die Unterschiede kommen besser zum Vorschein (man beachte nicht die Längen der Strahlen, welche ich mich nicht bemüht habe, stets genau in gleichem Maassstabe abzugrenzen und welche die Trübung nicht bestimmen, sondern die Grösse und Lichtvertheilung gleichliegender Phosphoreszenzflecke); CO_2 zeigt sich jetzt deutlich trüber als O_2 , SO_2 noch trüber. Entsprechendes zeigt Verticalr. III, bei 10 mm Druck, welche nur CO_2 und SO_2 enthält. Am deutlichsten werden die Unterschiede bei 3 mm Druck (Reihe IV); hier erscheint auch O_2 deutlich etwas trüber als N_2 (vgl. die beiden ersten Phosphoreszenzflecke, von denen der des N_2 keinen Hof hat, obgleich er weiter vom Fenster entfernt ist, als der des O_2). Bei noch weiterer Verdünnung beginnen endlich mit den Gasen auch ihre Unterschiede wieder zu verschwinden; in Reihe V, bei 0,5 mm Druck, ist Trübung überhaupt nur mehr bei CO_2 und SO_2 zu be-

merken, wo die zarten Höfe der ersten Phosphoreszenzflecke etwas über den geometrischen Strahl hinausgreifen, mit welchem der Kathodenstrahl im übrigen zusammenfällt.

Alle graphisch nicht wiedergegebenen Beobachtungen bestätigen nur das schon Gesagte. Insbesondere sind die Strahlen in atmosphärischer Luft nur sehr wenig oder gar nicht verschieden von denen in Sauerstoff und Stickstoff von gleichem Drucke, wie nach der geringen Verschiedenheit der letzteren beiden nicht anders zu erwarten. Ein Verzeichniss sämtlicher vollständig beobachteter und gezeichneter Strahlen findet man in Tab. IV; die hierzu ausgewählten Diaphragmenstellungen (also auch die der Fig. 6 und 12) waren die charakteristischsten. Ist das Diaphragma näher ans Fenster geschoben, so verlieren die Strahlen schon infolge der geometrischen Verhältnisse an Schärfe, ist es weiter davon entfernt, so verlieren sie infolge der Absorption an Intensität und Länge; die wesentlichen Unterschiede zwischen den verschiedenen Medien bleiben indessen, wenn auch weniger deutlich, stets bemerkbar. Sämtliche Gase waren sorgfältig bereit, gewaschen und getrocknet; beim Uebergange von einem Gase zum anderen wurde der Beobachtungsraum vorher ausgepumpt, mit dem neuen Gase gefüllt, wieder ausgepumpt und wieder gefüllt. H_2 und CO_2 waren direct aus den Entwicklungsapparaten, O_2 und N_2 aus einem Gasometer entnommen, die SO_2 vom Boden eines sehr grossen, verhältnissmässig engen Glaszylinders, aus welchem sie die Luft durch ihre Schwere verdrängt hatte.

Dass die Ausbreitung hinter dem Diaphragma im Wesentlichen wirklich auf den Raum beschränkt ist, den wir als Strahl bezeichnet und in den Figuren dargestellt haben, liess sich durch Einschalten der Blende Fig. 11a zwischen Diaphragma und Schirm nachweisen. Die Phosphoreszenzflecke werden dabei nur dann geändert (am Rande verdunkelt) wenn die Blende in den als Strahl bezeichneten Raum hineingreift. Zwischen Fenster und Diaphragma eingeschaltet, hat die Blende in keiner Stellung Einfluss auf die Phosphoreszenzflecke. Solche Versuche wurden in Luft von verschiedenem Drucke ausgeführt.

19. Die Trübung ist allein durch die Dichte des gasförmigen Mediums bestimmt; verschiedene Gase werden gleich

trübe, wenn sie durch Druckänderung auf gleiche Dichte gebracht werden. — Es konnte oben, bei Vergleichung der Strahlen in verschiedenen Gasen überraschen, dass kein einziges Gas irgend welche besondere, charakteristische Eigenthümlichkeiten zeigte. Verschiedene Gase waren nicht mehr verschieden als ein und dasselbe Gas bei verschiedenem Drucke. Trifft dies vollständig zu, dann muss für jedes Gas ein Druck zu finden sein; bei welchem die Ausbreitung in dem Gase genau dieselbe ist, wie in einem beliebigen anderen Gase bei gegebenem Drucke. Verdünnen wir z. B. schwefelige Säure nur weit genug, so muss sie genau denselben Strahl liefern wie Wasserstoff bei gewöhnlichem Drucke. Es müssten sich, allgemein, sämtliche beobachteten Strahlen in eine einzige Reihe ordnen lassen, vom trübsten bis zum klarsten, als wären sie alle in einem und demselben Gase, nur bei verschiedenen Drucken beobachtet. Dies ist nun in der That vollkommen ausführbar. Um zwei beliebige Strahlen leicht und genau vergleichen zu können, hatte ich jeden einzeln sorgfältig auf einen Streifen Coordinatenpapier copirt, und diese Streifen liessen sich ohne Schwierigkeit ordnen wie verlangt, so also, dass sämtliche gleichliegende Phosphoreszenzflecke bei jedem folgenden Strahle kleiner und schärfer begrenzt sind als beim vorhergehenden. Nur ergaben sich dabei statt einer einzigen Reihe naturgemäss drei Reihen, den drei Diaphragmenstellungen entsprechend, da nur solche Strahlen vergleichbar sind, die bei gleichen Diaphragmenstellungen erhalten wurden. Folgendes sind diese 3 Reihen, jedesmal beim trübsten Medium angefangen (Tab. IV). Wie man sieht, zeigen sich die so nach abnehmender Trübung geordneten Medien zugleich nach abnehmender Dichte geordnet.¹⁾ Vereinzelte Abweichungen kommen nur bei den aller dichtesten Medien vor, wo die Untersuchungsmethode die Strahlen fast gleich erscheinen lässt (vgl. p. 262), und bei den aller dünnsten, wo die Trübung und damit ihre Unterschiede überhaupt schon verschwinden. Die einzige, die Trübung

1) Da der grösste Theil der Strahlen in Fig. 6 und 12 wiedergegeben ist und die Dichten dort überall beigeschrieben sind, wird man den Satz leicht auch an den Figuren verificiren. Welches Strahlenpaar man auch herausgreift, stets wird man einen dem Dichtenunterschied entsprechenden Unterschied in der Trübung finden. Man vergleiche wieder nur Grösse und Lichtvertheilung der Phosphoreszenzflecke.

bestimmende Eigenschaft eines gasförmigen Mediums irgend welcher Art ist also dessen Dichte. Mit anderen Worten: gleiche Massen bringen stets gleiche Trübung hervor.

Tabelle IV.

1.			2.		
Diaphragma 2,5 cm vom Fenster			Diaphragma 5 cm vom Fenster		
Gas	Druck	Dichte	Gas	Druck	Dichte
	mm	(H ₂ 760 mm = 1)		mm	(H ₂ 760 mm = 1)
Luft	385	7,3	SO ₂	3,8	0,16
SO ₂	180	7,6	CO ₂	3,2	0,093
CO ₂	180	5,2	O ₂	3,3	0,070
O ₂	180	3,8	H ₂	42,2	0,056
N ₂	180	3,3	Luft	2,9	0,055
SO ₂	86	3,6	N ₂	3,0	0,055
SO ₂	42,0	1,8	H ₂	3,3	0,0044
CO ₂	39,2	1,2	3.		
H ₂	754	1,0	Diaphragma 10 cm vom Fenster		
O ₂	40,0	0,87	Gas	Druck	Dichte
N ₂	41,6	0,78		mm	(H ₂ 760 mm = 1)
Luft	40,0	0,76	CO ₂	0,50	0,015
H ₂	335	0,44	SO ₂	0,50	0,021
SO ₂	9,0	0,38	H ₂	3,3	0,0044
CO ₂	10,2	0,30	O ₂	0,65	0,014
H ₂	167	0,22	N ₂	0,45	0,0085
Luft	10,2	0,19	H ₂	0,67	0,00086
H ₂	88	0,12			
H ₂	42,2	0,056			

20. Kathodenstrahlen verschiedener Art verlaufen in verschiedenem Grade diffus. — Wir haben bisher stets die Erzeugungsbedingungen möglichst constant gehalten (15), also nur Kathodenstrahlen einer einzigen, bestimmten Art untersucht. So war insbesondere der Druck im Entladungsrohr in den vorbeschriebenen Strahlversuchen stets von solcher Grösse, dass zwischen den auf 2,8 cm Abstand gestellten Kugeln *B* Fig. 1 ab und zu Funken übersprangen. Verringern wir nun den Druck im Entladungsrohr, während das Medium im Beobachtungsraume ungeändert bleibt, so haben wir zunächst zunehmende Intensität der Strahlen zu erwarten (2), also Hellerwerden der Phosphoreszenzflecke. Vergrösserte sich dabei gleichzeitig ihr Durchmesser, so dürfte dies bei ihrer verwaschenen Begrenzung nicht überraschen; die Vergrösserung könnte nur scheinbar sein. Es tritt aber das Gegentheil ein.

Während die Helligkeit der Flecke im Centrum stark zunimmt, nimmt sie am Rande ab, die Flecke ziehen sich an Umfang zusammen und werden deutlich schärfer. Vergrössern wir umgekehrt den Gasdruck im Entladungsrohre, so werden die Flecke nicht nur dunkler, sondern auch viel grösser und verwaschener; war Kern und Hof vorhanden, so können diese dabei vollständig ineinander verschwimmen. Diese Erscheinungen wurden häufig beobachtet, während bei den vorhergehenden Versuchen (18) das Vacuum im Entladungsrohre auf die richtige Höhe gebracht wurde. Mit besonders darauf gerichteter Aufmerksamkeit habe ich sie verfolgt in Luft von 13 mm Druck, in Wasserstoff von 167 mm und in Kohlensäure von 39,2 mm Druck, wobei die Funkenlänge (*B*, Fig. 1) welche die Verdünnung im Entladungsrohre bemisst, zwischen 2 und 4 cm variirt wurde.

Wir schliessen, dass Kathodenstrahlen, welche bei verschiedenen Gasdrucken erzeugt sind, die Eigenschaft diffuser Ausbreitung in Gasen in verschiedenem Grade besitzen. Bei geringerer Verdünnung erzeugte Strahlen verlaufen diffuser als bei höherer Verdünnung erzeugte. Dass es verschiedene Arten von Kathodenstrahlen gibt, „deren Eigenschaften in einander übergehen, welche den Farben des Lichtes entsprechen und welche sich unterscheiden nach Phosphorescenzerregung, Absorbirbarkeit und Ablenkbarkeit durch den Magnet“, hat schon Hertz bemerkt¹⁾.

So wie die diffuse Ausbreitung der Kathodenstrahlen in Gasen überhaupt, so hat auch insbesondere die hier beobachtete Erscheinung ihr bekanntes optisches Analogon: kurzwelliges Licht wird in gewissen optisch trüben Medien mehr zerstreut als langwelliges.

21. Nach dem hier beobachteten Verhalten der Gase zu schliessen, müssen die Aethervorgänge, welche das Wesen der Kathodenstrahlen ausmachen, Vorgänge von so ausserordentlicher Feinheit sein, dass Dimensionen von molecularer Grössenordnung in Betracht kommen. Selbst gegen Licht von kleinster bekannter Wellenlänge verhält sich die Materie noch wie stetig den Raum erfüllend; den Kathodenstrahlen gegenüber

1) Hertz, Wied. Ann. 19. p. 816. 1883.

ist dagegen das Verhalten selbst elementarer Gase das nicht-homogener Medien; es scheint hier schon jedes einzelne Molecül als gesondertes Hinderniss aufzutreten. Gasmolecüle trüben den Aether, und es ist sehr bemerkenswerth, dass hierbei keine anderen Eigenschaften der Molecüle in Betracht kommen, als allein nur ihre Masse. Die Gesamtmasse der in der Volumeneinheit vorhandenen Molecüle ist bestimmend für die Trübung des Mediums. Werden die Gasmolecüle durch grobe suspendirte Theilchen ersetzt, die Kathodenstrahlen durch Licht, so gelangt man zu gleichen Erscheinungen, doch ist dann das Verhalten des Mediums schwerlich mehr durch eine einzige und so einfache Angabe bestimmt.

Bonn, Physik. Inst. d. Univ, December 1893.

Während die Helligkeit der Flecke im Centrum stark zunimmt, nimmt sie am Rande ab, die Flecke ziehen sich an Umfang zusammen und werden deutlich schärfer. Vergrössern wir umgekehrt den Gasdruck im Entladungsrohre, so werden die Flecke nicht nur dunkler, sondern auch viel grösser und verwaschener; war Kern und Hof vorhanden, so können diese dabei vollständig ineinander verschwimmen. Diese Erscheinungen wurden häufig beobachtet, während bei den vorhergehenden Versuchen (18) das Vacuum im Entladungsrohre auf die richtige Höhe gebracht wurde. Mit besonders darauf gerichteter Aufmerksamkeit habe ich sie verfolgt in Luft von 13 mm Druck, in Wasserstoff von 167 mm und in Kohlensäure von 39,2 mm Druck, wobei die Funkenlänge (B , Fig. 1) welche die Verdünnung im Entladungsrohre bemisst, zwischen 2 und 4 cm variirt wurde.

Wir schliessen, dass Kathodenstrahlen, welche bei verschiedenen Gasdrucken erzeugt sind, die Eigenschaft diffuser Ausbreitung in Gasen in verschiedenem Grade besitzen. Bei geringerer Verdünnung erzeugte Strahlen verlaufen diffuser als bei höherer Verdünnung erzeugte. Dass es verschiedene Arten von Kathodenstrahlen gibt, „deren Eigenschaften in einander übergehen, welche den Farben des Lichtes entsprechen und welche sich unterscheiden nach Phosphorescenzerregung, Absorbirbarkeit und Ablenkbarkeit durch den Magnet“, hat schon Hertz bemerkt¹⁾.

So wie die diffuse Ausbreitung der Kathodenstrahlen in Gasen überhaupt, so hat auch insbesondere die hier beobachtete Erscheinung ihr bekanntes optisches Analogon: kurzwelliges Licht wird in gewissen optisch trüben Medien mehr zerstreut als langwelliges.

21. Nach dem hier beobachteten Verhalten der Gase zu schliessen, müssen die Aethervorgänge, welche das Wesen der Kathodenstrahlen ausmachen, Vorgänge von so ausserordentlicher Feinheit sein, dass Dimensionen von molecularer Grössenordnung in Betracht kommen. Selbst gegen Licht von kleinster bekannter Wellenlänge verhält sich die Materie noch wie stetig den Raum erfüllend; den Kathodenstrahlen gegenüber

1) Hertz, Wied. Ann. 19. p. 816. 1888.

ist dagegen das Verhalten selbst elementarer Gase das nicht-homogener Medien; es scheint hier schon jedes einzelne Molecül als gesondertes Hinderniss aufzutreten. Gasmolecüle trüben den Aether, und es ist sehr bemerkenswerth, dass hierbei keine anderen Eigenschaften der Molecüle in Betracht kommen, als allein nur ihre Masse. Die Gesamtmasse der in der Volumeneinheit vorhandenen Molecüle ist bestimmend für die Trübung des Mediums. Werden die Gasmolecüle durch grobe suspendirte Theilchen ersetzt, die Kathodenstrahlen durch Licht, so gelangt man zu gleichen Erscheinungen, doch ist dann das Verhalten des Mediums schwerlich mehr durch eine einzige und so einfache Angabe bestimmt.

Bonn, Physik. Inst. d. Univ, December 1893.

2. Zur Theorie der magnetischen und electrischen Erscheinungen; von Hermann Ebert.

1. Einleitung.

Durch die Arbeiten von H. Hertz und E. Cohn ist die theoretische Electrodynamik von überflüssigen Bestandtheilen („rudimentären Begriffen“) gesäubert worden, und das ganze System der Erfahrungsthatfachen auf dem Gebiete der magnetischen, electromagnetischen und electrischen Erscheinungen in einem Systeme von sechs partiellen Differentialgleichungen I. Ordnung für die ruhenden und von ebensovielen Gleichungen für die bewegten Medien zusammengefasst worden.¹⁾

Es fragt sich, ob wir hiermit die Entwicklung der Theorie der genannten Erscheinungsgebiete als abgeschlossen betrachten müssen. H. Hertz neigte der Ansicht zu, es genüge, das genannte System von zwölf partiellen Differentialgleichungen an die Spitze zu stellen; die Theorie hätte dann nur die Aufgabe, aus diesen Gleichungen die Einzelercheinungen abzuleiten und an der Erfahrung zu prüfen. Dass dieser Standpunkt nicht allgemein befriedigte, zeigen die zahlreichen Versuche jene Gleichungen mechanisch zu begründen. Gerade wie man in anderen Gebieten bei fortschreitender Erkenntniss die Erscheinungen als reine Bewegungsvorgänge betrachtet, so musste man das Ziel einer Interpretation der electrischen Erscheinungen ebenfalls in der Zurückführung auf phoronomische Processe sehen. Damit musste die Elimination besonderer „imponderabler Fluida“ Hand in Hand gehen, die sich hier noch am längsten erhalten haben.

Die aus den alten Anschauungen übernommenen Begriffe der „Electricität“, der „Electricitätsmenge“ und der Menge „freien Magnetismus“ treten noch an die Spitze der Systematik der electrischen und magnetischen Erscheinungen von

1) H. Hertz, Wied. Ann. 40. p. 577. 1890 oder „Untersuchungen“ p. 208. 1892 im folgenden immer als „Hertz I“ citirt. Wied. Ann. 41. p. 369. 1890 oder „Untersuchungen“ p. 256. 1892, als „Hertz II“ citirt; E. Cohn, Wied. Ann. 40. p. 625. 1890.

Hertz und Cohn, da sie dort zur Definition jener Vectorgrößen nöthig sind, welche als „electriche“ bzw. „magnetische“ Kraft eingeführt werden.¹⁾ Eine weitere Frage ist dann, ob jenes System von zwölf Differentialgleichungen auch wirklich der physikalisch „einfachste“ Ausdruck für jene Vorgänge bildet, welche sich dort abspielen, wo sich magnetische und electriche Kraftlinien durch den Raum ausspannen. Endlich verlangen methodische Rücksichten eine „anschaulichere“ Begründung der Theorie der electriche Erscheinungen.

Bei Versuchen in dieser Richtung weiter zu gehen, hat man entweder die Maxwell'schen Gleichungen, oder ihre abgeklärte Form, die Hertz'schen Gleichungen auf einfache Bewegungs- und Spannungsvorgänge im Aether zurückgeführt. Auffallend ist zunächst, dass überhaupt mehrere mechanische Interpretationen, die oft von entgegengesetzten Annahmen ausgehen, möglich sind. Das Problem ist also ein vieldeutiges. H. Poincaré wies darauf hin²⁾, dass dies in der Vieldeutigkeit der Lösung begründet liegt, welche die partielle Differentialgleichung:

$$f'' \equiv \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i} q_i$$

zulässt, wenn wir in der von Helmholtz'schen Bezeichnungweise mit p_i die allgemeinen Parameter des Problems, mit $q_i = p'_i$ ihre Aenderungsgeschwindigkeiten und durch die Accentuirung Ableitungen nach der Zeit darstellen. Sucht man die infinitesimalen Transformationen nach der Bezeichnung von Sophus Lie auf, welche diese Differentialgleichung unter den näheren hier vorliegenden Verhältnissen gestattet, so scheint die gruppentheoretische Behandlung der Gleichung auch im vorliegenden Falle wichtige Anhaltspunkte über die Besonderheiten des Lösungssystems, welches speciell den electriche Erscheinungen entspricht, zu gewähren.³⁾

Unter den möglichen Lösungen verdient von vornherein

1) Vgl. auch L. Boltzmann, Vorles. über Maxwell's Theorie der Electricität und des Lichtes. II. Theil p. 13 ff. J. A. Barth. 1893.

2) H. Poincaré, Electricité et Optique. p. IX ff. Paris. 1890.

3) Eine derartige systematische Behandlung, bei der auch zahlreiche Einzelprobleme sowie gewisse mathematische Entwicklungen, die hier nicht Platz finden konnten, eingehender behandelt werden soll, gedenke ich demnächst in einer besonderen Schrift zu geben; daselbst

die einfachste den Vorzug, wenn sie zugleich alle Erscheinungen einwurfsfrei erklärt. Dies ist bei den vorhandenen Theorien noch nicht vollkommen der Fall, jede stösst auf gewisse Schwierigkeiten, welche die Autoren meist selbst zugestehen. Die Beobachtungsthatfachen selbst weisen aber, wie mir scheint, unzweideutig auf einen Weg hin, der zu einer äusserst einfachen Lösung führt:

Wollen wir tiefer in die Vorgänge eindringen, welche den electrodynamischen Gleichungen zu Grunde liegen, so muss man festhalten, dass die *magnetischen* Erscheinungen auf wirbelartig in sich zurücklaufende, oder allgemeiner auf cyklische Bewegungen im von Helmholtz'schen Sinne zurückzuführen sind. Schon Maxwell suchte, nachdem er die Faraday'schen Vorstellungen von selbstständig im Raum bestehenden und fortschreitenden Zuständen in eine mathematische Form gebracht hatte, die mechanische Grundlage jener Zustände aufzufinden. Aus der Annahme, dass in der Umgebung der Magnetkraftlinien Wirbelbewegungen stattfinden, erklärte er alle Erscheinungen des Magnetismus und Electromagnetismus ohne weitere Hypothese.¹⁾ Dabei war ihm der galvanische Strom zunächst nur eine besondere Form eines Magnetkraftliniensystems.

Erst die fundamentalen Arbeiten von H. v. Helmholtz über die Statik monocyclischer Systeme, haben die Eigenschaften jener Systeme in sich zurücklaufender Bewegungen, welche die Wirbelbewegungen als speciellen Fall umfassen, genauer kennen gelehrt und so ist es jetzt möglich, diesen Untersuchungen eine sichere Grundlage zu geben. Von den von Helmholtz'schen Untersuchungen ausgehend, habe ich versucht, eine Theorie der electricischen und magnetischen Er-

soll auch auf die Arbeiten von Vito Volterra (Atti R. Accad. dei Lincei (4). Rendiconti 7. p. 177. 1891 und Il nuovo Cimento (3) 29. p. 147. 1891) und Ol. Heaviside näher eingegangen, sowie die Beziehungen der einzelnen Theorien zu einander und zu der vorliegenden eingehender discutirt werden.

1) Cl. Maxwell, Phil. Mag. (4) 21. p. 161, 281, 338. 1861 u. 23. p. 12, 85. 1862. Die consequente Weiterführung dieses Erklärungsversuches scheiterte an den „rudimentären“ Begriffen, welche ganz zu eliminiren Maxwell noch nicht gelang. Die Frictionsröllchen, die er zwischen die Wirbel einbettete und die er mit der „Electricität“ identifizierte, waren eine nicht nöthige Complication.

scheinungen zu geben. Dieselbe setzt bei dem Träger der Erscheinungen nur die Möglichkeit in sich zurücklaufender, „cyklischer Bewegungen“ voraus; sie unterscheidet sich von der von Hrn. L. Boltzmann ¹⁾ im ersten Theile seines Buches über die Maxwell'sche Theorie gegebenen wesentlich. Wir leiten aus ihr die Grundgleichungen der Electrodynamik sowohl für isotrope wie anisotrope, nichtleitende wie leitende, homogene wie inhomogene, ruhende wie bewegte Körper ab.

Auch die Erscheinungen der Dispersion und Absorption können ohne weiteres in das System eingereiht werden.

Durch Modelle kann diese Theorie in einfacher Weise der Anschauung zugänglich gemacht werden.

2. Grundlagen der Theorie.

Dass den magnetischen Erscheinungen etwas zu Grunde liegt, was kinematisch als ein System in sich zurücklaufender Bewegungen aufzufassen ist, setzte schon Ampère voraus. Später zeigte Sir W. Thomson, dass die electromagnetische Drehung der Polarisationssebene des Lichtes nur so gedeutet werden kann, dass zu den undulatorischen Zustandsänderungen des Aethers längs des polarisirten Lichtstrahles noch rotatorische in sich zurücklaufende Bewegungen längs der magnetischen Kraftlinien, diese als Axen benutzend, in dem magnetischen Felde hinzutreten, Betrachtungen, welche unabhängig von dem Sinne, in dem die Drehung thatsächlich erfolgt (ob mit oder gegen den Strom), durchgeführt werden können. ²⁾ In der That legen auch alle Theorien, welche dieses Phänomen, so wie das ihm verwandte Kerr'sche Phänomen zu erklären suchen, diese Annahme zu Grunde.

Bei weitem die wichtigsten wie mir scheint noch nicht genügend betonten Argumente für das Vorhandensein solcher in sich zurücklaufender elementarer Bewegungen im magnetischen Felde, hat aber Hr. v. Helmholtz gegeben in seinen Abhandlungen über die allgemeine Theorie der kinematischen Systeme überhaupt, welche solche in sich zurücklaufende Bewegungen enthalten, — „cyklischer Systeme“ — (Statik mono-

1) L. Boltzmann, Vorlesungen über Maxwell's Theorie der Electricität und des Lichtes. Leipzig. J. A. Barth. I. Theil. 1891.

2) Vgl. Maxwell, Treatise 2. Cap. 21. u. 22. §§. 806—845.

cyklischer Systeme)¹⁾ und in seinen Abhandlungen über die allgemeine Bedeutung des Principes der kleinsten Wirkung²⁾; hier werden sehr allgemeine Eigenschaften der electromagnetischen Erscheinungen abgeleitet. Wir entnehmen diesen Abhandlungen das folgende, für uns grundlegende Ergebniss: In den Fällen, wo an gewissen Coordinaten angreifende Kräfte dauernd gleich Null sind, kann man die entsprechenden Coordinaten ganz aus dem Problem eliminiren, die Bewegungsgleichungen lassen sich zwar auf die gewöhnliche Gestalt bringen, aber die kinetische Energie ist nicht mehr wie sonst eine homogene Funktion II. Grades der (cyklischen) Geschwindigkeiten, sondern enthält im Allgemeinen auch andere, z. B. erste Potenzen derselben. Behält man alle Coordinaten wirklich bei, so nennt v. Helmholtz das System ein „vollständiges“; bei ihm hat die kinetische Energie die Form eines Ausdruckes II. Grades in den Geschwindigkeiten; nimmt man aber die Elimination vor, so erhält man das „unvollständige Gleichungssystem“.

Ein Beispiel dieser Art bietet ein in einer Cardanischen Aufhängung um seine Axe sich drehender Rotationskörper.³⁾ Dreht sich der Körper sehr rasch, so sehen wir nichts von seiner Bewegung. Suchen wir aber die Axe aus ihrer Lage herauszubringen, so tritt uns an jeder Coordinate, die wir zu ändern streben, — Drehen der Ringe der Cardani'schen Aufhängung, — eine gewisse Kraft entgegen.

Solche Fälle nennt v. Helmholtz mit Rücksicht auf die in der Mechanik wägbarer Körper gegebene Analogie „*Fälle mit verborgenen Bewegungen*“, und er zeigt in der angeführten Abhandlung (vgl. p. 147), dass der Fall der Wechselwirkung zwischen Magneten und electrischen Strömen hierher gehört. Hier sind die zu Grunde liegenden in sich zurücklaufenden,

1) H. v. Helmholtz, Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss. Math. naturw. Mittheil. 1884. p. 67—86; p. 153—160; p. 375—380; p. 693—698; (Crelle-Borchardt'sches) Journal für reine und angew. Math. 97. p. 111—140; p. 317—336. 1884.

2) H. v. Helmholtz, Journal f. reine und angew. Math. 100. p. 137—166 u. p. 213—222. 1887.

3) H. v. Helmholtz, Journal f. reine und angew. Math. 100. p. 153. 1887.

also „cyklischen“ Bewegungen, unserer Anschauung noch weniger zugänglich, wie in dem Beispiel des rasch rotierenden Kreisels, aber so wie wir z. B. mit einem Leiter eine Ortsveränderung in dem Magnetfelde vornehmen, bemerken wir das Auftreten einer stromanregenden sogenannten „electromotorischen“ Kraft. Längs der Magnetkraftlinien finden also solche verborgene in sich zurücklaufende Bewegungen statt.

In der That hat v. Helmholtz durch genau dieselben allgemeinen Schlüsse das electrodynamische Inductionsgesetz aus den Bewegungsgleichungen hergeleitet, durch die sich die Beziehungen zwischen Winkeländerungen und den entsprechenden Kräften am Kiesel ergeben. Ja v. Helmholtz gibt an (p. 142 a. a. O.), dass es geradezu die hier in Betracht kommenden Untersuchungen über die Form des kinetischen Potentials, welches Maxwell's Theorie der Electrodynamik fordert, waren, die ihm die Anregung zu den späteren, sehr allgemeinen und tief in die Natur der hier vorliegenden Erscheinungen eindringenden Untersuchungen gaben.

Anknüpfend an diese Ergebnisse von H. v. Helmholtz können wir als bewiesen betrachten, dass überall, wo magnetische Kraftlinien sich im Raume spannen, eine uns freilich zunächst „verborgene Bewegung“ vor sich geht, eine Bewegung von der wir aber wissen, dass es eine cyklische, d. h. in sich zurücklaufende kieselähnliche oder wirbelartige Bewegung ist.

Bezeichnen wir nun die Componenten desjenigen Vectors, welcher in jedem Punkte des Raumes die magnetische Kraft angiebt, mit L, M, N , die Componenten der cyklischen Geschwindigkeit des daselbst vorhandenen Monocykels, welcher dieser äquivalent ist, mit ξ, η, ζ (Accentuirungen sollen im Folgenden immer Ableitungen nach der Zeit bedeuten), so haben wir zu setzen:

$$(1) \quad L = k \cdot \xi, \quad M = k \cdot \eta, \quad N = k \cdot \zeta.$$

Hier ist also

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \eta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right),$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

cyklischer Systeme)¹⁾ und in seinen Abhandlungen über die allgemeine Bedeutung des Principes der kleinsten Wirkung²⁾; hier werden sehr allgemeine Eigenschaften der electromagnetischen Erscheinungen abgeleitet. Wir entnehmen diesen Abhandlungen das folgende, für uns grundlegende Ergebniss: In den Fällen, wo an gewissen Coordinaten angreifende Kräfte dauernd gleich Null sind, kann man die entsprechenden Coordinaten ganz aus dem Problem eliminiren, die Bewegungsgleichungen lassen sich zwar auf die gewöhnliche Gestalt bringen, aber die kinetische Energie ist nicht mehr wie sonst eine homogene Funktion II. Grades der (cyklischen) Geschwindigkeiten, sondern enthält im Allgemeinen auch andere, z. B. erste Potenzen derselben. Behält man alle Coordinaten wirklich bei, so nennt v. Helmholtz das System ein „vollständiges“; bei ihm hat die kinetische Energie die Form eines Ausdruckes II. Grades in den Geschwindigkeiten; nimmt man aber die Elimination vor, so erhält man das „unvollständige Gleichungssystem“.

Ein Beispiel dieser Art bietet ein in einer Cardanischen Aufhängung um seine Axe sich drehender Rotationskörper.³⁾ Dreht sich der Körper sehr rasch, so sehen wir nichts von seiner Bewegung. Suchen wir aber die Axe aus ihrer Lage herauszubringen, so tritt uns an jeder Coordinate, die wir zu ändern streben, — Drehen der Ringe der Cardani'schen Aufhängung, — eine gewisse Kraft entgegen.

Solche Fälle nennt v. Helmholtz mit Rücksicht auf die in der Mechanik wägbarer Körper gegebene Analogie „*Fälle mit verborgenen Bewegungen*“, und er zeigt in der angeführten Abhandlung (vgl. p. 147), dass der Fall der Wechselwirkung zwischen Magneten und electrischen Strömen hierher gehört. Hier sind die zu Grunde liegenden in sich zurücklaufenden,

1) H. v. Helmholtz, Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss. Math. naturw. Mittheil. 1884. p. 67—86; p. 153—160; p. 375—380; p. 693—698; (Crelle-Borchardt'sches) Journal für reine und angew. Math. 97. p. 111—140; p. 317—336. 1884.

2) H. v. Helmholtz, Journal f. reine und angew. Math. 100. p. 137—166 u. p. 213—222. 1887.

3) H. v. Helmholtz, Journal f. reine und angew. Math. 100. p. 153. 1887.

also „cyklischen“ Bewegungen, unserer Anschauung noch weniger zugänglich, wie in dem Beispiel des rasch rotierenden Kreisels, aber so wie wir z. B. mit einem Leiter eine Ortsveränderung in dem Magnetfelde vornehmen, bemerken wir das Auftreten einer stromanregenden sogenannten „electromotorischen“ Kraft. Längs der Magnetkraftlinien finden also solche verborgene in sich zurücklaufende Bewegungen statt.

In der That hat v. Helmholtz durch genau dieselben allgemeinen Schlüsse das electrodynamische Inductionsgesetz aus den Bewegungsgleichungen hergeleitet, durch die sich die Beziehungen zwischen Winkeländerungen und den entsprechenden Kräften am Kiesel ergeben. Ja v. Helmholtz gibt an (p. 142 a. a. O.), dass es geradezu die hier in Betracht kommenden Untersuchungen über die Form des kinetischen Potentials, welches Maxwell's Theorie der Electrodynamik fordert, waren, die ihm die Anregung zu den späteren, sehr allgemeinen und tief in die Natur der hier vorliegenden Erscheinungen eindringenden Untersuchungen gaben.

Anknüpfend an diese Ergebnisse von H. v. Helmholtz können wir als bewiesen betrachten, dass überall, wo magnetische Kraftlinien sich im Raume spannen, eine uns freilich zunächst „verborgene Bewegung“ vor sich geht, eine Bewegung von der wir aber wissen, dass es eine cyklische, d. h. in sich zurücklaufende kieselähnliche oder wirbelartige Bewegung ist.

Bezeichnen wir nun die Componenten desjenigen Vectors, welcher in jedem Punkte des Raumes die magnetische Kraft angiebt, mit L, M, N , die Componenten der cyklischen Geschwindigkeit des daselbst vorhandenen Monocykels, welcher dieser äquivalent ist, mit ξ, η, ζ (Accentuirungen sollen im Folgenden immer Ableitungen nach der Zeit bedeuten), so haben wir zu setzen:

$$(1) \quad L = k \cdot \xi, \quad M = k \cdot \eta, \quad N = k \cdot \zeta.$$

Hier ist also

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \eta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right),$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

wenn u, v, w die rechtwinkligen Geschwindigkeitscomponenten sind; k ist eine „innere Constante des Aethers“ im Hertz'schen Sinne.¹⁾

Es könnte scheinen, als ob wir hier zwei speciellere Annahmen einführen, welche die Allgemeinheit unserer Betrachtungen beeinträchtigen. Erstens könnte es den Anschein erwecken, als ob die Einführung der Constanten k ein näheres Eingehen auf die zu Grunde liegenden Processe nöthig mache; wir werden aber später zeigen, dass sie explicite gar keine Rolle bei den electricischen Erscheinungen spielt, sondern mit einer anderen, später einzuführenden ähnlichen Hülfsconstanten l sich zu der Hertz'schen Constanten A (reciproke Lichtgeschwindigkeit) vereinigt, der dann ein ganz bestimmter physikalischer Sinn zukommt. Aus dieser kann man dann umgekehrt gewisse Schlüsse über die speciellere Natur der zu Grunde liegenden Vorgänge ableiten. Zweitens könnte es befremdlich erscheinen, dass wir die L, M, N den ξ, η, ζ proportional setzen. Dies rechtfertigt aber die Erfahrung. Diese lehrt, dass wir die Energie des in magnetischer Spannung befindlichen Mediums pro Volumeneinheit

$$T = \frac{\mu}{8\pi} (L^2 + M^2 + N^2)$$

zu setzen haben. Die magnetische Energie hat nach dem Obigen kinetische Form; nach v. Helmholtz muss sie homogen vom II. Grade in den cyklischen Geschwindigkeiten sein (da wir nicht eliminirt haben), folglich ist

$$(2) \quad T = \frac{\mu k^2}{8\pi} (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2);$$

wir haben ein „vollständiges“ v. Helmholtz'sches System (vgl. p. 272).

Wir haben damit die Ausdrücke für die magnetische Kraft und Energie festgesetzt. Daraus müssen sich unter Berücksichtigung der Erfahrungsthaten die der electricischen Kraft und Energie eindeutig ergeben.

Die *Erfahrung* lehrt, dass stets die electricischen Erscheinungen mit magnetischen derart verknüpft sind, dass die zeitliche Aenderung einer mit dem Ort variablen Vectorgrösse

1) Vgl. H. Hertz, I. p. 583 (Untersuch. p. 214).

X, Y, Z , die wir electrische Kraft nennen, gleich ist der augenblicklichen räumlichen Vertheilung der magnetischen Kräfte L, M, N in der Umgebung. Diese Thatsache findet in dem Hertz'schen Gleichungssystem (wir wollen es kurz „das Erste“ nennen):

$$(1) \quad \begin{cases} A\varepsilon \frac{dX}{dt} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} \\ A\varepsilon \frac{dY}{dt} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} \\ A\varepsilon \frac{dZ}{dt} = \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} \end{cases}$$

ihren Ausdruck.¹⁾ Setzen wir hier für L, M, N die Werthe aus (1) ein und integrieren wir nach der Zeit, so ergibt sich, dass wir die X, Y, Z , Ausdrücken wie $\partial \eta / \partial z - \partial \zeta / \partial y$ etc. proportional zu setzen haben. (Der von der Zeit unabhängigen Integrationsconstanten kann man immer den speciellen Werth Null ertheilen).

Wir schreiben also:

$$(3) \quad X = \frac{l}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right), \quad Y = \frac{l}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z} \right), \quad Z = \frac{l}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right),$$

wo l eine Hilfsconstante ist, für die dasselbe gilt wie oben für k . Wie man sieht, folgen diese Werthe für die X, Y, Z völlig eindeutig aus unserer Grundannahme; sie sind abhängig von den cyklischen Coordinaten selbst. Leider fehlt es an einem einfachen Ausdrucke für eine derartige Form der Abhängigkeit. (In der Sprache der Quaternionen würde man sagen, der Vector der electrischen Kraft $iX + jY + kZ$, ist gleich dem vectoriellen Bestandtheile des Operators

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z},$$

wenn man ihn auf den Vector der cyklischen (Dreh-)Bewegung $f(i\xi' + j\eta' + k\zeta') dt$ wirken lässt; diese Aussage ist äquivalent damit, dass man sagt, das Linienintegral längs einer geschlossenen Curve des einen Vectors ist gleich dem Flächenintegrale des anderen [$\int f$ Vectorprojection auf die Normale mal Flächenelement], welche die Curve zur alleinigen und vollständigen Begrenzung hat, oder gleich dem Vektoren-

1) H. Hertz, I. p. 584. Gleich. (4 b) (Untersuch. p. 215).

flusse durch die Fläche). Ol. Heaviside hat hierfür die Bezeichnung „curl“ eingeführt¹⁾, welchen auch wir beibehalten wollen. Wir sagen also, der Vector der electricischen Kraft ist gleich dem „curl“ der cyklischen Bewegung. Mechanisch würden wir die electricische Kraft uns vorstellen können als Spannungen, die im Aether auftreten in Folge örtlicher Verschiedenheiten der Verdrehungen, welche die einzelnen benachbarten Elemente gegeneinander erfahren haben, wie dies in der Mac Cullagh'schen Lichttheorie und bei dem quasi-elastischen Aether Sir William Thomson's angenommen ist.²⁾

Für die Energie dieser „electricischen Spannungenkräfte“ haben wir erfahrungsgemäss bekanntlich zu schreiben:

$$\Phi = \frac{\epsilon}{8\pi} (X^2 + Y^2 + Z^2);$$

dieselbe würde bei der genannten mechanischen Interpretation potentieller Natur sein. Setzen wir die Werthe aus (3) ein, so erhalten wir

$$(4) \quad \Phi = \frac{l^2}{8\pi} \left[\frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right].$$

1) Ol. Heaviside, Electrical papers. 1. p. 199. 1892.

2) *Anmerkung.* Aetherdrehungen spielen auch in anderen electromagnetischen Theorien eine Rolle; aber entweder werden durch sie die magnetischen Kräfte erklärt (Lord Kelvin¹⁾, E. Padova²⁾, L. Boltzmann³⁾, und den electricischen Kräften andere Bedeutung, als es hier geschehen ist, beigemessen, oder es werden zwar die electricischen Kräfte den Drehungen zugeschrieben, aber für die magnetischen Kräfte treten andere Ausdrücke als die Winkelgeschwindigkeiten ein, so die linearen Geschwindigkeiten bei A. Sommerfeld⁴⁾ oder R. Reiff⁵⁾; ferner spielen dort die Aetherdrehungen selbst, hier aber nur deren Unterschiede an einer Stelle und den benachbarten eine Rolle; dadurch unterscheiden sich diese Theorien von der hier entwickelten mehr oder weniger.

1) Sir William Thomson, Math. and Phys. Papers 3. Art. 99, namentlich §. 39. p. 436. 1890.

2) E. Padova, Il nuovo Cimento (3). 29. p. 225. 1891; vgl. auch Atti della Acad. dei Lincei (4). Rendiconti 7. 1. Sem. p. 204. 1891.

3) L. Boltzmann, Wied. Ann. 48. p. 78. 1893 und Vorlesungen über Maxwell's Theorie II. Theil. Leipzig 1893.

4) A. Sommerfeld, Wied. Ann. 46. p. 139. 1892.

5) R. Reiff, Ueber Wirbelbew. reibender Flüssigkeiten. Mittheil. math. naturw. Vereins in Württemberg. 1893. — Elasticität und Electricität. Freiburg i. B. u. Leipzig. 1893.

Φ ist also von den cyklischen Variablen selbst abhängig.¹⁾

Die Gleichungen (1) bis (4) genügen vollständig, um alle Gleichungen der Electrodynamik für die Nichtleiter abzuleiten.

Bei der Aufstellung der Gleichung für die Leiter ist noch folgendes zu beachten. Wir haben bisher vorausgesetzt, dass die cyklischen Bewegungen im Aether keinen Energieverlust erleiden; wir wissen aber, dass es Körper gibt, in denen solche Verluste eintreten; bei elastisch gekoppelten Monocykeln, wie sie unserem Falle entsprechen, findet diese Erscheinung in einem theilweisen Abgleiten der gegeneinander gedrehten Elemente und damit verbundene Wärmeentwicklung ihren mechanischen Ausdruck. In dem Hertz'schen Gleichungssysteme wird diesem Umstande Rechnung durch Hinzufügen der Glieder $-4\pi\lambda AX$, $-4\pi\lambda AY$, $-4\pi\lambda AZ$ auf den rechten Seiten der Gleichungen (I) (λ : „Leitvermögen“) getragen.²⁾ Hertz gelangt hierzu, indem er annimmt, dass die zeitlichen Verluste, welche in den Werthen des electrischen Vectors infolge der Leitung eintreten, dem Werthe des Vectors selbst proportional sind. In unserem Falle entspricht der „curl“ der cyklischen Coordinaten diesem Vector, wir haben also das Gleiche für diesen anzunehmen und damit die für die Nichtleiter erhaltenen Gleichungen auch auf die Leiter dadurch auszudehnen, dass wir analoge Glieder hinzufügen.

Wir gelangen so zu den Gleichungen für die Leiter auch ohne eine bestimmte Annahme über den hierbei stattfindenden Process der Energieverwandlung einzuführen. Weiter unten (p. 296) sollen einige speciellere Vorstellungen über die mechanische Grundlage der electrischen Leitungsvorgänge gegeben werden.

1) Die cyklischen Variablen selbst fehlen in dem Ausdrucke der Energie und damit in dem des kinetischen Potentials $H = \Phi - T$ (freie Energie) wie bei den v. Helmholtz'schen Monocykeln; dagegen treten hier Ableitungen der cyklischen Variablen nach den Orten auf, was bei den Cykeln der Mechanik „elastisch gekoppelten Monocykeln“ entspricht, wie leicht allgemeiner nachzuweisen ist.

2) H. Hertz, I. p. 586 (Untersuch. p. 217).

3. Ableitung der Grundgleichungen für ruhende isotrope Medien.

Wenn wir nach den Gleichungen (3)

$$X = \frac{l}{\epsilon} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \text{ etc.}$$

setzen, so erhalten wir durch Differentiiren nach der Zeit:

$$\epsilon \frac{dX}{dt} = l \left(\frac{\partial \eta'}{\partial x} - \frac{\partial \zeta'}{\partial y} \right),$$

und wenn wir hier für η' , ζ' die Werthe aus (1) einsetzen:

$$\frac{k}{l} \frac{dX}{dt} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y};$$

schreiben wir für k/l den Werth A , so erhalten wir das erste Hertz'sche System:

$$(I) \quad A \epsilon \frac{dX}{dt} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} \text{ etc.}$$

für isotrope Nichtleiter.¹⁾ Bei Leitern treten nach p. 277 noch die Glieder $-4\pi\lambda \cdot AX$ etc. hinzu, sodass wir erhalten:

$$A \epsilon \frac{dX}{dt} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} - 4\pi\lambda AX \text{ etc.}$$

das erste Hertz'sche System für isotrope Leiter.²⁾

Das zweite Hertz'sche System, welches zeitliche Aenderungen des magnetischen Zustandes durch die räumliche Vertheilung der electricischen Zustände darstellt, erhalten wir durch Anwendung des Hamilton'schen Principes aus den Ausdrücken für die Energie. Setzen wir in

$$(H) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} \iiint_{-\infty}^{+\infty} (T - \Phi) d\tau dt = 0$$

die Werthe für T und Φ aus (2) und (4) ein, so erhält man, wenn man die Variation in Bezug auf die cyklischen Coordinaten ξ , η , ζ , ξ' , η' , ζ' ausführt (wobei die bei inhomogenen Medien noch von x , y , z abhängigen Factoren μ und ϵ als constant anzusehen sind):

1) H. Hertz, I. p. 584. Gleich. (4b) (Untersuch. p. 215.)

2) H. Hertz, I. p. 587. Gleich. (6b) (Untersuch. p. 218.)

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} dt \left(\iiint_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{\mu k^2}{4\pi} [\xi \cdot \delta \xi' + \eta' \cdot \delta \eta' + \zeta' \cdot \delta \zeta] \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{l^2}{4\pi} \left[\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta \eta}{\partial x} - \frac{\partial \delta \zeta}{\partial y} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \delta \xi}{\partial y} \right) \right] \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\partial \delta \xi}{\partial x} \right] + \frac{l}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta \xi}{\partial y} - \frac{\partial \delta \eta}{\partial x} \right) \right\} d\tau, \right.$$

wo wir uns das Raumintegral so weit erstreckt denken, dass an den Grenzen die Geschwindigkeiten und Drehungen gleich Null sind; bei dazwischen liegenden Unstetigkeitsflächen wenden wir den „v. Helmholtz'schen Kunstgriff“ an, d. h. wir nehmen an, dass sich unsere Functionen ξ , η , ζ , ξ' , η' , ζ' zwar in ihnen sehr rasch von Ort zu Ort ändern, aber doch noch stetig („Princip der Continuität der Uebergänge“).¹⁾ Dann können wir bei den partiellen Integrationen der nach den Coordinaten differentirten Variationen, durch die wir die vorige Gleichung umformen, die Flächenintegrale gleich Null setzen; die gleichzeitige partielle Ausführung des Zeitintegrals im ersten Theile

$$\left(\delta \xi = \delta \frac{d\xi}{dt} = \frac{d\delta \xi}{dt} \right)$$

und der Uebergang zu den Zeitelementen führt zu

$$\frac{\mu k^2}{4\pi} \cdot \xi'' = \frac{l^2}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \right] \text{ etc.}$$

wenn man die in dieselbe Variation multiplicirten Glieder gleich Null setzt. Nach (1) und (3) folgt aber hieraus:

$$\frac{\mu k}{l} \cdot \frac{dL}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x},$$

oder da oben $k/l = A$ gesetzt wurde:

$$(II) \quad A \mu \frac{dL}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \text{ etc.}$$

das zweite Hertz'sche System, welches in gleicher Weise für Nichtleiter, wie für Leiter gilt.²⁾

1) L. Boltzmann. Vorlesungen, II. Theil. p. 9.

2) H. Hertz, I. p. 584. Gleich. (4a) u. p. 587. Gleich. (6a) (Untersuch. p. 215 u. 219).

Die Constante A ist wieder eine „innere Constante des Aethers“ (vgl. oben p. 274). Differentirt man eines der beiden Hertz'schen Systeme nach der Zeit und substituirt man rechts für die Zeitableitungen die Werthe aus dem anderen Systeme, so erkennt man, dass A die reciproke Geschwindigkeit ist, mit der sich periodische Zustandsänderungen durch den freien Aether ($\varepsilon = 1$, $\mu = 1$) fortpflanzen, denn man wird auf die bekannten Wellengleichungen geführt.

Sehr einfach ergibt sich die Erweiterung, welche die Hertz'schen Gleichungen zu erfahren haben, wenn sie auch die Dispersions- und Absorptionserscheinungen mit umfassen sollen:

Bei unserer Auffassung werden die Zustandsänderungen in einem Punkte bestimmt durch die Zustände in der Nachbarschaft. Die Uebertragung kann aber nicht mit unendlicher Geschwindigkeit erfolgen. Erfolgen daher die Zustandsänderungen im electromagnetischen Felde sehr rasch wie bei dem Lichte, so muss die Zeit in Betracht kommen, welche nöthig ist, damit sich ein Bewegungszustand von einem Punkte auf den anderen überträgt. Sind ξ , η , ζ die Werthe der cyklischen Variablen (Drehungen) in der Umgebung eines Punktes, so bestimmen die Grössen:

$$l \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \text{ etc.}$$

nicht mehr einen Werth von X , wie er zur Zeit t , sondern wie er zu einer etwas späteren Zeit $t + dt$ statt hat. Wir haben also, wenn wir sogleich die Taylor'sche Entwicklung benutzen, zu setzen:

$$X + c_0 \frac{dX}{dt} + c_1 \frac{d^2 X}{dt^2} + \dots = \frac{l}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right),$$

oder wenn nur harmonische Zustandsänderungen von der Form $A \cdot e^{i 2\pi m t}$ ($m = 1/T$ Schwingungszahl) in Betracht kommen:

$$X + c_1 \frac{d^2 X}{dt^2} + c_3 \frac{d^4 X}{dt^4} + \dots = \frac{l}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \cdot 1)$$

Die Differentiation nach der Zeit giebt jetzt:

$$A \left(\varepsilon \frac{dX}{dt} + \varepsilon' \frac{d^3 X}{dt^3} + \varepsilon'' \frac{d^5 X}{dt^5} + \dots \right) = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} \text{ etc.}$$

1) Diese Betrachtung ist ganz analog derjenigen, die früher von mir angestellt wurde (Wied. Ann. 48. p. 1. 1893), wo es sich darum handelte, das Maxwell'sche Gleichungssystem so zu erweitern, dass in ihm auch die Dispersionserscheinungen ihre Erklärung finden.

Von diesen Gleichungen hat P. Drude, welcher sie hypothetisch dem Hertz'schen Gleichungssystem einfügte, bereits nachgewiesen, dass sie zusammen mit dem zweiten Hertz'schen System p. 279 vollkommen alle Dispersionserscheinungen darstellen, und dass auch die zugehörigen Grenzbedingungen mit dem Energieprincip verträglich sind.¹⁾

4. Ableitung der Grundgleichungen für ruhende anisotrope Medien.

Gehen wir zu anisotropen Medien über, so haben wir wieder die magnetischen Kräfte proportional den Geschwindigkeiten eventuell vorhandener cyklischer Bewegungen ξ, η, ζ zu setzen:

$$(5) \quad L = r \xi \quad M = r \eta' \quad N = r \zeta'$$

(r eine Hilfsconstante). Die Wirkung dieser cyklischen Bewegungen kommt aber nicht unmittelbar in den Erscheinungen zum Ausdruck, sie wird modificirt durch die Anisotropie des Mediums. Was wir beobachten, sind die magnetischen Polarisationen, deren Componenten lineare Functionen der drei Componenten der von den cyklischen Bewegungen ausgehenden magnetischen Kräfte sind. Wir finden, dass die Beziehungen der beiden Vektorengrößen der Kraft und der Polarisation durch sechs Größen, die bei inhomogenen Körpern noch Functionen des Ortes sind, vollständig dadurch bestimmt sind, dass die Componenten der magnetischen Polarisation $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ an die der Kraft gebunden sind durch die Gleichungen:²⁾

$$(6) \quad \begin{cases} \mathfrak{L} = \mu_{11} L + \mu_{12} M + \mu_{13} N = \mu_{11} r \xi' + \mu_{12} r \eta' + \mu_{13} r \zeta' \\ \mathfrak{M} = \mu_{21} L + \mu_{22} M + \mu_{23} N = \mu_{21} r \xi' + \mu_{22} r \eta' + \mu_{23} r \zeta' \\ \mathfrak{N} = \mu_{31} L + \mu_{32} M + \mu_{33} N = \mu_{31} r \xi' + \mu_{32} r \eta' + \mu_{33} r \zeta' \end{cases}$$

wo $\mu_{23} = \mu_{32}$, $\mu_{31} = \mu_{13}$, $\mu_{12} = \mu_{21}$ ist.

Die kinetische Energie hat hier den Werth:

$$T = \frac{1}{8\pi} (\mathfrak{L} L + \mathfrak{M} M + \mathfrak{N} N),$$

oder:

1) P. Drude, Nachr., Gött. Ges. d. Wissensch. p. 366. 1892.

2) H. Hertz, I. p. 592, Formel 9, c (Untersuch. p. 224).

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} T = \frac{r^2}{8\pi} (\mu_{11} \xi'^2 + \mu_{22} \eta'^2 + \mu_{33} \zeta'^2 + 2\mu_{23} \eta' \zeta' + 2\mu_{31} \zeta' \xi' \\ + 2\mu_{12} \xi' \eta') \dots \end{aligned} \right.$$

Räumliche Verschiedenheiten in den „Drehungen“ ξ, η, ζ rufen auch hier „Spannungen“ im Medium hervor. Auf die Vertheilung der Spannungen selbst hat der Anisotropismus des Mediums einen bestimmenden Einfluss, da sich dasselbe in verschiedenen Richtungen verschieden leicht spannen lässt. Die hervorgerufenen Spannungen sind die der dielectricischen Polarisation, welche durch drei Richtungsgrössen $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ bezogen auf die drei Axenrichtungen für jeden Punkt eindeutig bestimmt sind. Wir haben also analog wie früher zu setzen:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{X} &= s \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \\ \mathfrak{Y} &= s \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \\ \mathfrak{Z} &= s \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \end{aligned} \right.$$

(s eine Hilfsconstante). Ausser durch diese drei Richtungsgrössen $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ kann man den Spannungszustand des Mediums aber noch in anderer Weise durch drei Grössen X, Y, Z darstellen, welche linear mit den ersten zusammenhängen. Setzen wir:

$$(9a) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{X} &= \epsilon_{11} X + \epsilon_{12} Y + \epsilon_{13} Z \\ \mathfrak{Y} &= \epsilon_{21} X + \epsilon_{22} Y + \epsilon_{23} Z \\ \mathfrak{Z} &= \epsilon_{31} X + \epsilon_{32} Y + \epsilon_{33} Z \end{aligned} \right.$$

oder

$$(9b) \quad \left\{ \begin{aligned} X &= \alpha_{11} \mathfrak{X} + \alpha_{12} \mathfrak{Y} + \alpha_{13} \mathfrak{Z} \\ Y &= \alpha_{21} \mathfrak{X} + \alpha_{22} \mathfrak{Y} + \alpha_{23} \mathfrak{Z} \\ Z &= \alpha_{31} \mathfrak{X} + \alpha_{32} \mathfrak{Y} + \alpha_{33} \mathfrak{Z} \end{aligned} \right.$$

wo die α den entsprechenden Unterdeterminanten der ϵ proportional sind, so nennt man X, Y, Z die Componenten der electricischen Kraft; sie ist bei anisotropen Körpern der Beobachtung nicht unmittelbar zugänglich. Nur in isotropen Körpern gehen die X, Y, Z in die $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ über. Für die ϵ gilt wieder, dass

$$\epsilon_{23} = \epsilon_{32}, \quad \epsilon_{31} = \epsilon_{13}, \quad \epsilon_{12} = \epsilon_{21},$$

und folglich auch

$$\alpha_{23} = \alpha_{32}, \quad \alpha_{31} = \alpha_{13}, \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} \text{ ist.}$$

Ist das anisotrope Medium noch inhomogen, so sind die ϵ und α Functionen des Ortes.

Die potentielle Energie Φ ist jetzt:

$$\Phi = \frac{1}{8\pi} (\mathfrak{X} X + \mathfrak{Y} Y + \mathfrak{Z} Z),$$

oder

$$(10) \left\{ \begin{aligned} \Phi = \frac{s^2}{8\pi} & \left[\alpha_{11} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 + \alpha_{22} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \alpha_{33} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right. \\ & + 2\alpha_{23} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + 2\alpha_{31} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \\ & \left. + 2\alpha_{12} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

Bezüglich der μ , ϵ und α wollen wir annehmen, dass sie von der Zeit unabhängig sind, das Medium also keine Veränderungen erleidet.

Die Ableitung des ersten Hertz'schen Gleichungssystems ergibt sich dann auch hier ganz unmittelbar; differentiirt man die Gleichungen (8) nach der Zeit, setzt die Werthe für ξ , η , ζ aus (5) ein und schreibt für r/s die Grösse A , so erhält man:

$$A \frac{d\mathfrak{X}}{dt} = A \left(\epsilon_{11} \frac{dX}{dt} + \epsilon_{12} \frac{dY}{dt} + \epsilon_{13} \frac{dZ}{dt} \right) = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y}$$

und ähnlich für die anderen Componenten. Dies ist aber das Hertz'sche Gleichungssystem für die zeitliche Aenderung der electricen Polarisationen in ihrer Abhängigkeit von der augenblicklichen räumlichen Vertheilung der magnetischen Kräfte für krystallinische Nichtleiter.

Bei Leitern treten zeitliche Aenderungen des electricen Polarisationszustandes auch noch in Folge von Leitung auf. Wegen des Anisotropismus wird dieser Verlust an electricer Spannung im Allgemeinen wieder eine lineare Function der drei Polarisationscomponenten und damit der Kraftcomponenten sein. Setzen wir also mit Hertz:

$$u = \lambda_{11}(X - X') + \lambda_{12}(Y - Y') + \lambda_{13}(Z - Z') \text{ etc.}$$

wo die X' , Y' , Z' Componenten von eventuell an bestimmten Stellen des Mediums wirkenden electromotorischen Kräften

hydro- oder thermoelectrischen Ursprungs sind, so erhalten wir die Gleichungen

$$A \frac{d\mathfrak{X}}{dt} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} - 4\pi A u \text{ etc.}$$

d. h. die Gleichungen (9b) bei Hertz für die anisotropen Leiter.

Die entsprechenden Gleichungssysteme, welche die zeitlichen Aenderungen der magnetischen Polarisationen als bedingt durch die Vertheilung der electricischen Kräfte in der Umgebung darstellen, erhält man auch hier, indem man auf unser System von cyklischen Geschwindigkeiten und curls cyklischer Coordinaten das Princip von Hamilton anwendet. Der Ausdruck H (p. 278) nimmt hier die Gestalt an, wenn wir sogleich die Variationen in Bezug auf die cyklischen Coordinaten vornehmen (dabei bleiben die μ und α , welche zwar Functionen der Ortscoordinaten x, y, z sind, offenbar unverändert):

$$\begin{aligned} 0 = \int_{t_0}^{t_1} dt \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} & \left\{ \frac{r^2}{4\pi} [\mu_{11} \xi' \cdot \delta \xi' + \mu_{22} \eta' \cdot \delta \eta' + \mu_{33} \zeta' \cdot \delta \zeta' \right. \\ & + \mu_{23} \eta' \cdot \delta \zeta' + \mu_{23} \zeta' \cdot \delta \eta' + \mu_{31} \zeta' \cdot \delta \xi' + \mu_{31} \xi' \cdot \delta \zeta' \\ & + \mu_{12} \xi' \cdot \delta \eta' + \mu_{12} \eta' \cdot \delta \xi'] - \frac{s^2}{4\pi} \left[\alpha_{11} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right. \right. \\ & - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \left(\frac{\partial \delta \eta}{\partial x} - \frac{\partial \delta \zeta}{\partial y} \right) + \alpha_{22} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \delta \zeta}{\partial x} \right. \\ & - \frac{\partial \delta \xi}{\partial z} \right) + \alpha_{33} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta \xi}{\partial y} - \frac{\partial \delta \eta}{\partial x} \right) \\ & + \alpha_{23} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \delta \xi}{\partial y} - \frac{\partial \delta \eta}{\partial x} \right) + \alpha_{23} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right. \\ & - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \delta \xi}{\partial z} \right) + \alpha_{31} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta \eta}{\partial x} \right. \\ & - \frac{\partial \delta \zeta}{\partial y} \right) + \alpha_{31} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta \xi}{\partial y} - \frac{\partial \delta \eta}{\partial x} \right) \\ & + \alpha_{12} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \delta \xi}{\partial z} \right) + \alpha_{12} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \delta \eta}{\partial x} - \frac{\partial \delta \zeta}{\partial y} \right) \right] \Big\} d\tau. \end{aligned}$$

Durch Ausführung der Zeitintegrale im ersten Theile dieses Ausdruckes, der partiellen Integrationen über Raum-

coordinaten im zweiten Theile, durch Behandeln der Grenzwerte wie auf p. 279, und durch Nullsetzen der in dieselbe Variation multiplicierten Ausdrücke erhält man:

$$r^2 [\mu_{11} \cdot \xi'' + \mu_{12} \cdot \eta'' + \mu_{13} \cdot \zeta''] = s^2 \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(a_{31} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + a_{32} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) + a_{33} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \right) \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial z} \left(a_{21} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) + a_{22} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + a_{23} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \right) \right]$$

oder mit Rücksicht auf (5), (8) und (9b) und darauf, dass wir setzten: $r/s = A$:

$$A \left(\mu_{11} \frac{dL}{dt} + \mu_{12} \frac{dM}{dt} + \mu_{13} \frac{dN}{dt} \right) = A \frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}$$

und analog für die übrigen Coordinaten. Dies sind die Gleichungen (9a) bei Hertz, welche zusammen das zweite Hertz'sche System für den allgemeinen Fall der anisotropen homogenen oder inhomogenen Körper ausmachen.

Durch ganz analoge Betrachtungen wie oben p. 280 kann man auch diese Systeme so erweitern, dass sie für rasch wechselnde electromagnetische Zustände gelten; dann treten höhere Ableitungen der Polarisationsvectoren nach der Zeit auf und die Gleichungen umfassen auch die Erscheinungen der normalen und anomalen Dispersion in den anisotropen Medien.¹⁾

5. Ableitung der Grundgleichungen für bewegte Medien.

Wir haben die magnetischen und electriche Erscheinungen auf Bewegungsvorgänge zurückgeführt, die an die Orte der magnetischen Kraftlinien gebunden sind und auf „curls“, welche aus Ungleichheiten in diesen Bewegungen an benachbarten Orten resultiren. Nach der Grundhypothese, auf der Hertz die Electrodynamik bewegter Medien aufbaute, nehmen die einzelnen Theilchen des Mediums das Kraftliniensystem bei der Bewegung mit sich fort; dies ist auch noch der Fall, wenn man die zu Grunde liegenden Vorgänge ganz in den Aether

1) Vgl. P. Drude, Nachr. Gött. Ges. d. Wissensch. 1893.

verlegt, denn von diesem kann man ebenso annehmen, dass er sich vollkommen mit dem materiellen Substrat des Mediums mitbewegt, ohne mit Thatsachen der Erfahrung in Widerspruch zu gerathen.¹⁾ Wir müssen also ohne weitere Hypothese aus unserer Annahme über die Natur der electromagnetischen Vorgänge auch die Grundgleichungen für bewegte Körper erhalten können. Nach Hertz haben wir nur die magnetischen und electrischen Polarisationen bez. Kräfte (cyklische Bewegungen und curls) auf das System der Polarisationslinien selbst zu beziehen, und als Coordinaten solche Parameter a, b, c einzuführen, deren verschiedene Werthsysteme die verschiedenen Theilchen des Mediums charakterisiren.²⁾

Wir gebrauchen die Bezeichnung „Polarisationslinien“ in demselben Sinne, wie man bei isotropen Medien von Kraftlinien spricht, für Linien, welche in jedem Punkte die Richtung der Polarisation angeben.

Ein bestimmtes Theilchen des Mediums sei durch die Parameter a, b, c seiner Lage nach bestimmt; die a, b, c sind von einander unabhängige Variable, die aber noch von der Zeit t abhängen. Die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z , die ein Theilchen zur Zeit t inne hat, betrachten wir als Functionen von a, b, c und der Zeit,

$$x = f(a, b, c, t), \quad y = g(a, b, c, t), \quad z = h(a, b, c, t)$$

und bezeichnen die Functionaldeterminante der x, y, z nach den a, b, c mit D :

$$(11) \quad D = \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix}.$$

Dann können wir die a, b, c als die Ortscoordinaten betrachten,

1) H. Hertz, II. p. 371. (Untersuch. p. 257).

2) Im directen Anschluss an die Gleichungen von Hertz hat Hr. Vito Volterra (Il nuovo Cimento (3). 29. p. 53. 1891) gezeigt, dass es bei Einführung eines solchen Bezugssystems möglich ist, die Grundgleichungen der Electrodynamik in eine solche Form zu bringen, dass sie gleichzeitig für ruhende wie für bewegte Körper gelten, was eben auf der Zulässigkeit der Hertz'schen Grundhypothese beruht.

welche die einzelnen Theilchen des Mediums zur Zeit $t = 0$ hatten, ähnlich wie man dies in der Hydrodynamik thut, wenn man die Bewegungsgleichungen in der „zweiten Euler'schen Form“ schreibt.¹⁾

Das Quadrat des beliebig im Raume gelegenen Linien-elementes ist dann eine homogene Function zweiten Grades der Differentiale da, db, dc . Wir wollen die Coefficienten dieser quadratischen Function mit H_{ik} bezeichnen derart, dass

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} ds^2 = & H_{11} \cdot da^2 + H_{22} \cdot db^2 + H_{33} \cdot dc^2 + 2 H_{23} \cdot db \cdot dc \\ & + 2 H_{31} \cdot dc \cdot da + H_{12} \cdot da \cdot db \end{aligned} \right.$$

ist. Dann ist die Determinante der H_{ik} bei denen $H_{ik} = H_{ki}$ ist gleich D^2 also:

$$D^2 = \begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{vmatrix};$$

wir bilden noch die Unterdeterminanten dieser Determinante und setzen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{D} \begin{vmatrix} H_{22} & H_{23} \\ H_{32} & H_{33} \end{vmatrix} &= u_a, & \frac{1}{D} \begin{vmatrix} H_{31} & H_{23} \\ H_{31} & H_{33} \end{vmatrix} &= u_b, & \frac{1}{D} \begin{vmatrix} H_{21} & H_{23} \\ H_{31} & H_{33} \end{vmatrix} &= u_c \\ \frac{1}{D} \begin{vmatrix} H_{12} & H_{13} \\ H_{32} & H_{33} \end{vmatrix} &= v_a, & \frac{1}{D} \begin{vmatrix} H_{11} & H_{13} \\ H_{31} & H_{33} \end{vmatrix} &= v_b, & \frac{1}{D} \begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{31} & H_{32} \end{vmatrix} &= v_c \\ \frac{1}{D} \begin{vmatrix} H_{12} & H_{13} \\ H_{22} & H_{23} \end{vmatrix} &= w_a, & \frac{1}{D} \begin{vmatrix} H_{11} & H_{13} \\ H_{21} & H_{23} \end{vmatrix} &= w_b, & \frac{1}{D} \begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{vmatrix} &= w_c. \end{aligned}$$

In dem Medium denken wir uns die electriche und magnetischen Polarisationslinien, die in isotropen Körpern mit den Kraftlinien zusammenfallen, construirt; analytisch stellen sie sich als Schnittlinien von je zwei Oberflächenschaaren: $\varphi_1(a, b, c) = E_1$ und $\varphi_2(a, b, c) = E_2$ für die electriche, $\psi_1(a, b, c) = M_1$, $\psi_2(a, b, c) = M_2$ für die magnetischen Polarisationen dar. Dann sind die Producte der drei zweigliedrigen Functional-

1) Die Methode, die Bewegungen von Flüssigkeiten dadurch analytisch zur Darstellung zu bringen, dass die Coordinaten x, y, z irgend eines Theilchens der Flüssigkeit zur Zeit t als Functionen der Zeit t und seiner Lage a, b, c zur Zeit $t = 0$ betrachtet werden, wird gewöhnlich dem Lagrange zugeschrieben, sie findet sich aber schon 29 Jahre früher bei Euler in der grössten Vollständigkeit. (Euler, De principiis motus fluidorum. Novi comm. acad. sc. imp. Petropolitanae 14. I. 1769. p. 358). Wir nennen sie daher die zweite Euler'sche Form der Differentialgleichungen der Hydrodynamik.

determinanten der φ bzw. der ψ nach den a, b, c in eine durch D dividirte noch willkürlich gelassene Function $\varphi(a, b, c)$ Grössen, welche unmittelbar den electrischen bzw. magnetischen Polarisationen entsprechen, wie man ohne Weiteres sieht, wenn man die Functionalmatrices der φ bzw. ψ nach x, y, z nach einem bekannten Satze¹⁾ entwickelt und dann auf die a, b, c transformirt. Nennen wir die sich auf die Parameter a, b, c beziehenden respectiven Grössen u_a, u_b, u_c bez. $\mathfrak{A}_a, \mathfrak{A}_b, \mathfrak{A}_c$, so haben wir für diese „verallgemeinerten Polarisationscomponenten“, wie wir sie nennen können, die Definitionsgleichungen:

$$(13) \quad u_a = \frac{\varphi}{D} \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ b & c \end{pmatrix}, \quad u_b = \frac{\varphi}{D} \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ c & a \end{pmatrix}, \quad u_c = \frac{\varphi}{D} \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$(14) \quad \mathfrak{A}_a = \frac{\psi}{D} \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ b & c \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}_b = \frac{\psi}{D} \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ c & a \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}_c = \frac{\psi}{D} \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ a & b \end{pmatrix}.$$

Wie in dem gewöhnlichen (cartesischen) Bezeichnungssystem neben diesen Polarisationen noch Grössen eine Rolle spielen, welche lineare Functionen der Polarisationen sind, die „so genannten Kräfte“, so wollen auch wir für gewisse lineare Ausdrücke der u und \mathfrak{A} besondere Bezeichnungen U und V einführen, die wir die „verallgemeinerten Kraftcomponenten“ nennen können. Wir führen sie durch die Definitionsgleichungen:

$$(15) \quad \begin{cases} U_a = A_{11} u_a + A_{12} u_b + A_{13} u_c \\ U_b = A_{21} u_a + A_{22} u_b + A_{23} u_c \\ U_c = A_{31} u_a + A_{32} u_b + A_{33} u_c \end{cases}$$

und

$$(16) \quad \begin{cases} V_a = B_{11} \mathfrak{A}_a + B_{12} \mathfrak{A}_b + B_{13} \mathfrak{A}_c \\ V_b = B_{21} \mathfrak{A}_a + B_{22} \mathfrak{A}_b + B_{23} \mathfrak{A}_c \\ V_c = B_{31} \mathfrak{A}_a + B_{32} \mathfrak{A}_b + B_{33} \mathfrak{A}_c \end{cases}$$

ein. Die u und U , sowie die \mathfrak{A} und V sind selbstconjugirte Vectorfunctionen; je eine Transformationsinvariante ist der electrischen Energie bez. magnetischen Energie

$$\frac{1}{8\pi}(u_a U_a + u_b U_b + u_c U_c), \quad \frac{1}{8\pi}(\mathfrak{A}_a V_a + \mathfrak{A}_b V_b + \mathfrak{A}_c V_c)$$

proportional; benutzen wir sie als Transformationsmoduln, so

1) Vgl. P. Gordan, Vorlesungen über Invariantentheorie I. p. 37. Leipzig 1885.

können wir z. B. die magnetische Polarisations \mathfrak{B} durch die magnetischen Kräfte ausdrücken:

$$(17) \quad \mathfrak{B}_a = M_{11} V_a + M_{12} V_b + M_{13} V_c \text{ etc.}$$

wo die M bekannten Unterdeterminanten proportional sind. Die magnetische Energie ist dann durch die ternäre homogene Form II. Grades:

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} F = \frac{1}{8\pi} (M_{11} V_a^2 + M_{22} V_b^2 + M_{33} V_c^2 + 2 M_{23} V_b V_c \\ + 2 M_{31} V_c V_a + 2 M_{12} V_a V_b) \end{aligned} \right.$$

gegeben.

Andere Invarianten erhalten wir durch Differentiren der genannten nach den Argumenten (Polarenbildung); ihre wichtige physikalische Bedeutung ist die der *Ergale*:

$$U_a da + U_b db + U_c dc, \quad V_a da + V_b db + V_c dc.$$

In Medien, welche mehr oder weniger die Eigenschaft der „electrischen Leitfähigkeit“ zeigen, spielen noch andere lineare Functionen der electrischen Polarisations eine Rolle; man nennt sie „Componenten der electrischen Leitungsströmung“. Sie sind gleich linearen Functionen der Feldpolarisationen, deren Coefficienten durch die „electrische Leitfähigkeit“ bestimmt sind, plus gewissen von den Feldzuständen unabhängigen Gliedern, deren Einfluss sich über denjenigen der ersteren lagert, und der von dem Auftreten specieller „electromotorischer Kräfte“ herrührt. Für isotrope Körper sind die (electromotorisch wirkenden) electrischen Kräfte des Feldes neben der Leitfähigkeit für die Strömung maassgebend.

Wenn wir setzen: $W_a = \mathfrak{B}_a + \mathfrak{B}_a^0$, wo

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_a &= (\Gamma_{11} u_a + \Gamma_{12} u_b + \Gamma_{13} u_c) u_a \\ &+ (\Gamma_{21} u_a + \Gamma_{22} u_b + \Gamma_{23} u_c) u_b \\ &+ (\Gamma_{31} u_a + \Gamma_{32} u_b + \Gamma_{33} u_c) u_c \end{aligned}$$

und \mathfrak{B}_a^0 ein analoger Ausdruck für die Theile a^0 , b^0 , c^0 des Mediums ist, an denen besondere electromotorische Kräfte thätig sind, so können wir die W_a , W_b , W_c als die „verallgemeinerten Strömungscomponenten“ betrachten.

Die *Erfahrung* zeigt nun, dass die so definirten Grössen in den folgenden Beziehungen zu einander stehen:

$$(19) \quad \begin{cases} A \frac{d(D\mathfrak{B}_a)}{dt} = \frac{\partial U_c}{\partial b} - \frac{\partial U_b}{\partial c} \\ A \frac{d(D\mathfrak{B}_b)}{dt} = \frac{\partial U_a}{\partial c} - \frac{\partial U_c}{\partial a} \\ A \frac{d(D\mathfrak{B}_c)}{dt} = \frac{\partial U_b}{\partial a} - \frac{\partial U_a}{\partial b} \end{cases}$$

$$(20) \quad \begin{cases} A \frac{d(D\mathfrak{U}_a)}{dt} = \frac{\partial V_b}{\partial c} - \frac{\partial V_c}{\partial b} - 4\pi A \cdot W_a \\ A \frac{d(D\mathfrak{U}_b)}{dt} = \frac{\partial V_c}{\partial a} - \frac{\partial V_a}{\partial c} - 4\pi A \cdot W_b \\ A \frac{d(D\mathfrak{U}_c)}{dt} = \frac{\partial V_a}{\partial b} - \frac{\partial V_b}{\partial a} - 4\pi A \cdot W_c \end{cases}$$

Dies sind die electrodynamischen Gleichungen in ihrer allgemeinsten Form. Sie gelten in unveränderter Gestalt sowohl für ruhende wie für *bewegte* Medien.¹⁾

Um auch diese aus unseren Grundvorstellungen abzuleiten, wollen wir die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z als Functionen der Parameter a, b, c betrachten, deren verschiedene Werthsysteme die einzelnen Partikel des Mediums charakterisiren. Dann haben die Rotationsgeschwindigkeiten an einer Stelle bekanntlich die Werthe:

$$\xi = A \frac{\partial x}{\partial a} + B \frac{\partial x}{\partial b} + C \frac{\partial x}{\partial c}$$

$$\eta = A \frac{\partial y}{\partial a} + B \frac{\partial y}{\partial b} + C \frac{\partial y}{\partial c}$$

$$\zeta = A \frac{\partial z}{\partial a} + B \frac{\partial z}{\partial b} + C \frac{\partial z}{\partial c},$$

$$A = -\frac{1}{2D} \left[\begin{pmatrix} x & u \\ b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & v \\ b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & w \\ b & c \end{pmatrix} \right] \text{ etc.}$$

Hier sind jetzt die ξ, η, ζ Functionen der a, b, c .

Wenn wir wieder die magnetischen Kräfte proportional der cyklischen Geschwindigkeit setzen, haben wir

$$V_a = m A \frac{\partial x}{\partial a} + m B \frac{\partial x}{\partial b} + m C \frac{\partial x}{\partial c}, \text{ etc.}$$

Die Componenten der magnetischen Polarisation sind nach (17):

$$\mathfrak{B}_a = M_{11} V_a + M_{12} V_b + M_{13} V_c \text{ etc.}$$

1) Vgl. Vito Volterra a. a. O. p. 60.

Die kinetische Energie hat jetzt den Werth

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} T = \frac{m^2}{8\pi} (M_{11} \xi'^2 + M_{22} \eta'^2 + M_{33} \zeta'^2 + 2 M_{23} \eta' \zeta' + 2 M_{31} \zeta' \xi' \\ + 2 M_{12} \xi' \eta') \end{aligned} \right.$$

Die Drehungen sind jetzt

$$\xi = \int_0^t dt \left(A \frac{\partial x}{\partial a} + B \frac{\partial x}{\partial b} + C \frac{\partial x}{\partial c} \right)$$

$$\eta = \int_0^t dt \left(A \frac{\partial y}{\partial a} + B \frac{\partial y}{\partial b} + C \frac{\partial y}{\partial c} \right)$$

$$\zeta = \int_0^t dt \left(A \frac{\partial z}{\partial a} + B \frac{\partial z}{\partial b} + C \frac{\partial z}{\partial c} \right)$$

Für die Componenten der dielectricischen Polarisation hat man hier:

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} D u_a &= n \left(\frac{\partial \eta}{\partial c} - \frac{\partial \zeta}{\partial b} \right) \\ D u_b &= n \left(\frac{\partial \zeta}{\partial a} - \frac{\partial \xi}{\partial c} \right) \\ D u_c &= n \left(\frac{\partial \xi}{\partial b} - \frac{\partial \eta}{\partial a} \right) \end{aligned} \right.$$

Für die electrischen Kräfte erhält man durch Auflösung dieses Gleichungssystems mit Rücksicht auf die Gleichungen (15)

$$\begin{aligned} U_a &= A_{11} \frac{n}{D} \left(\frac{\partial \eta}{\partial c} - \frac{\partial \zeta}{\partial b} \right) + A_{12} \frac{n}{D} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial a} - \frac{\partial \xi}{\partial c} \right) \\ &\quad + A_{13} \frac{n}{D} \left(\frac{\partial \xi}{\partial b} - \frac{\partial \eta}{\partial a} \right) \text{ etc.} \end{aligned}$$

Die potentielle Energie Φ hat jetzt den Werth

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{8\pi} \frac{n^2}{D^2} \left[A_{11} \left(\frac{\partial \eta}{\partial c} - \frac{\partial \zeta}{\partial b} \right)^2 + A_{22} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial a} - \frac{\partial \xi}{\partial c} \right)^2 + A_{33} \left(\frac{\partial \xi}{\partial b} - \frac{\partial \eta}{\partial a} \right)^2 \right. \\ &\quad + 2 A_{23} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial a} - \frac{\partial \xi}{\partial c} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial b} - \frac{\partial \eta}{\partial a} \right) + 2 A_{31} \left(\frac{\partial \xi}{\partial b} - \frac{\partial \eta}{\partial a} \right) \\ &\quad \left. - \frac{\partial \eta}{\partial a} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial c} - \frac{\partial \zeta}{\partial b} \right) + 2 A_{12} \left(\frac{\partial \eta}{\partial c} - \frac{\partial \zeta}{\partial b} \right) \left(\frac{\partial \zeta}{\partial a} - \frac{\partial \xi}{\partial c} \right) \right] \end{aligned}$$

Durch Ableiten nach der Zeit erhält man aus dem Gleichungs-

system (22) unmittelbar das erste verallgemeinerte Hertz'sche Gleichungssystem:

$$A \frac{d(D \mathfrak{U}_a)}{dt} = \frac{\partial V_b}{\partial c} - \frac{\partial V_c}{\partial b}, \text{ etc.}$$

wenn man $m/n = A$ setzt; sind Strömungen vorhanden, so treten rechts noch die Glieder $-4\pi A W_a$ hinzu und man erhält:

$$A \frac{d(D \mathfrak{U}_a)}{dt} = \frac{\partial V_b}{\partial c} - \frac{\partial V_c}{\partial b} - 4\pi A \cdot W_a \text{ etc.}$$

wie oben (20) p. 290.

Das zweite Hertz'sche System erhält man ganz analog wie oben durch Variation und Nullsetzen des Integrals

$$\int_{t=0}^{t=t_1} dt \left(\int \int \int D(T - \Phi) d\tau \right),$$

wo jetzt das Dreifachintegral aber über alle Werthsysteme der a, b, c zu erstrecken ist und bei den vorzunehmenden partiellen Integrationen die erhaltenen bestimmten Integrale immer für diese Variablen zu bilden sind. Auf diese sowie die Zeitintegrale kann man dieselben Schlüsse wie oben p. 279 anwenden. Die Functionaldeterminante D der x, y, z nach den a, b, c tritt unter dem Integrale nach einem bekannten Satze Jacobi's auf, wenn wir das Raumelement $d\tau$ jetzt nicht mehr durch dx, dy, dz , sondern durch da, db, dc ausdrücken. Die Rechnung gestaltet sich ganz analog wie p. 284 und man erhält schliesslich durch den Uebergang auf das Zeitelement und Nullsetzen der in dieselbe Variation $\delta \xi, \delta \eta, \delta \zeta$ multiplicirten Glieder:

$$\begin{aligned} m \frac{d}{dt} D (M_{11} m \xi' + M_{12} m \eta' + M_{13} m \zeta') - n^2 \left[\frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{A_{21}}{D} \left(\frac{\partial \eta}{\partial c} - \frac{\partial \zeta}{\partial b} \right) \right. \right. \\ + \frac{A_{22}}{D} \left(\frac{\partial \xi}{\partial a} - \frac{\partial \xi}{\partial c} \right) + \frac{A_{23}}{D} \left(\frac{\partial \xi}{\partial b} - \frac{\partial \eta}{\partial a} \right) \\ - \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{A_{21}}{D} \left(\frac{\partial \eta}{\partial c} - \frac{\partial \zeta}{\partial b} \right) + \frac{A_{22}}{D} \left(\frac{\partial \xi}{\partial a} - \frac{\partial \xi}{\partial c} \right) \right. \\ \left. \left. + \frac{A_{23}}{D} \left(\frac{\partial \xi}{\partial b} - \frac{\partial \eta}{\partial a} \right) \right) \right] = 0 \text{ etc.} \end{aligned}$$

Dies ist aber mit Rücksicht auf (17), (22) und (15)

$$A \frac{d(D\mathfrak{B}_a)}{dt} = \frac{\partial U_c}{\partial b} - \frac{\partial U_b}{\partial c} \text{ etc.,}$$

d. h. das zweite verallgemeinerte Hertz'sche System.

Bezüglich der Erscheinungen der Dispersion und Absorption lassen die beiden Gleichungssysteme genau dieselbe Erweiterung zu, wie die Gleichungen auf p. 280.

6. Veranschaulichung der Theorie.

Unsere Annahmen über die Natur der magnetischen und electriche Erscheinungen lassen sich an dem folgenden Aethermodelle von George Fr. Fitzgerald erläutern.¹⁾ Ein verticales Brett trägt mehrere horizontale Reihen vertical über einander stehender Axen, die senkrecht zum Brette befestigt sind. Auf diesen Axen sind Messingrollen möglichst leicht drehbar befestigt, in welche vier V-förmige, kreisförmige Vertiefungen eingeschnitten sind. Jede Rolle ist mit ihren vier Nachbarn durch in sich zurücklaufende Gummifäden verbunden, welche in die Vertiefungen gelegt sind. Nach unseren zu Grunde gelegten Vorstellungen erläutert es die electromagnetischen Erscheinungen, weil es einen elastisch gekoppelten Monocykel darstellt. Die Energie der sich um ihre Axen drehenden Messingrollen repräsentirt die Energie der magnetischen Kräfte, Spannungen, welche in den Gummifäden auftreten, wenn sich benachbarte Rollen verschieden schnell drehen (curl), stellen die electriche Kräfte dar. Dabei wird eine Seite eines Fadens gespannt, die andere mehr oder weniger entspannt. Die Differenz der Spannungen kann als Maass der Maxwell'schen dielectriche Zustandsänderung (displacement) dienen, die selbst der electriche Kraft proportional ist.

Denn die dielectriche Polarisirung (displacement) ist bei Maxwell nicht hervorgerufen durch entgegengesetzte Verschiebung von etwas Substanziellen, polar Differenzirtem, sondern bezeichnet allgemein den Zustand eines Mediums, bei dem

1) George Fr. Fitzgerald, Proc. R. Dublin Soc. (New series) 4. p. 407. 1895. vgl. auch Transactions R. London Soc. 171. Part. 2. p. 691. 1880, wo der Verf. Formeln aus den Maxwell'schen Gleichungen ableitet, die mit den hier entwickelten verwandt sind.

gegenüberliegende Seiten eines Elementes in polar entgegengesetztem Zustande sich befinden, genau wie bei dem Fitzgeraldmodelle die Spannung und Entspannung der elastischen Verbindungen zwischen den Rollen. Die Richtung des „displacement“ steht daher auch in dem Modelle, wie in der Theorie senkrecht zu der Richtung der magnetischen Kräfte (Rollachsen).

Fitzgerald hat a. a. O. näher gezeigt, wie man an dem Modelle die electromagnetischen Vorgänge im freien Aether, vor allem auch das Fortschreiten electromagnetischer Wellen veranschaulichen kann.

Die Spannungsverluste in oder an Leitern entsprechen einem theilweisen Gleiten der Gummifäden, welches mit Reibung und dadurch mit Wärmeentwicklung verbunden ist. Ol. Lodge nennt diesen Vorgang „slip“ der elementaren Bewegungen an Leitern im Gegensatz zu den ohne Energieverlust erfolgenden Drehungen im freien Aether, dem „spin“ (Modern views of electricity).

Die wichtigste Eigenschaft dieses Modelles, die seither noch nicht hervorgehoben wurde, scheint mir aber die zu sein, dass es den Grundgedanken der Hertz'schen Theorie unmittelbar zur Anschauung bringt und auch leicht die Hertz'schen Grundgleichungen für den Fall der isotropen, ruhenden Medien finden lässt, ohne das Hamilton'sche Princip zu benutzen. Denn es zeigt, wie die zeitliche Aenderung einer der Grössen, welche den electromagnetischen Zustand bestimmen, bedingt ist durch örtliche Verschiedenheiten (den „curl“) der anderen. Drehen sich benachbarte Rollen gleich schnell, sind also keine Unterschiede in der magnetischen Kraft vorhanden, so ändern sich die in den elastischen Fäden eventuell vorhandenen Spannungen nicht; dies tritt erst ein, wenn einige Rollen schneller gedreht werden als ihre Nachbarn. Umgekehrt kann der Bewegungszustand einer Rolle nur dadurch verändert werden, dass unmittelbar vorher die Spannungsverhältnisse der an der Rolle angreifenden Gummifäden nach den verschiedenen Richtungen hin verschieden waren. Formuliren wir diese beiden Aussagen, so erhalten wir die beiden Hertz'schen Gleichungssysteme.

Das erste Gleichungssystem (I) p. 278 ergibt sich un-

mittelbar aus der soeben angestellten Betrachtung über die zeitliche Aenderung, welche die Spannungen erfahren bei örtlichen Unterschieden in den Drehungen; mit Rücksicht auf die durch die Gleichungen (1) u. (3) p. 273 u. 275 eingeführten Bezeichnungen erhalten wir so:

$$(I) \quad A \varepsilon \frac{dX}{dt} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} \text{ etc.}$$

Um das zweite Gleichungssystem (II) p. 279 zu erhalten, denken wir uns die grossen, weit abstehenden Rollen des Modells durch sehr viele kleine und dicht bei einander stehende Rollen ersetzt und mit Gummifäden untereinander verbunden. Wir betrachten die Vorgänge auf einem Flächenstücke $dy \cdot dz$, welches eine Rolle enthält (die Ebene des Brettes ist als yz -Ebene gedacht, die y -Richtung soll mit den einen Rollenreihen, die z -Richtung mit den senkrecht dazu stehenden Reihen parallel gehen). Dann ist Y die Spannungsdifferenz in den Gummifäden auf der einen Seite der Rolle, $Y + (\partial Y / \partial z) \cdot dz$ die Spannung auf der entgegengesetzten Seite, Z u. $Z + (\partial Z / \partial y) \cdot dy$ die Spannungen in den senkrecht dazustehenden Fadenpaaren und

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) dy dz$$

ist die algebraische Summe aller Spannungsdifferenzen ringsum (das Linienintegral der Vektoren Y und Z rings um die Fläche $dy \cdot dz$, der „version“, wie es Heaviside nennt.¹⁾ Da aber jeder Impuls, der die Bewegung einer Rolle ändert, unmittelbar vorher als Spannungsdifferenz einer der zuführenden Gummifäden vorhanden ist, so bestimmt der gesammte Spannungszustand aller Fäden, wie er in einem Augenblicke rings um eine Rolle besteht, die zeitliche Aenderung $\mu dL/dt$ des Bewegungszustandes der Rolle, wie er unmittelbar darnach erfolgt. Die gleiche Betrachtung gilt, wenn das Flächenstück nicht eine, sondern mehrere Rollen enthält. Dann bestimmt der Spannungszustand an der Peripherie, der durch die Bewegung der ausserhalb liegenden Rollen bedingt ist, die mittlere Aenderung des Bewegungszustandes, der sogleich darnach auf der Fläche stattfinden muss: $A \mu (dL/dt) dy dz$ (durch den über-

1) Heaviside, Electrical papers. 1. p. 211. 1892.

gesetzten Strich bezeichnen wir diesen Mittelwerth). Denken wir uns die Rollen sehr klein und sehr dicht bei einander, die Fläche $dydz$ ebenfalls sehr klein, so geht $\mu dL/dt$, der Mittelwerth auf einer Fläche in $\mu dL/dt$, den Werth für eine bestimmte Stelle über. Derselbe ist also gleich:

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) dydz,$$

wir erhalten also

$$\mu A \frac{dL}{dt} dydz = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) dydz,$$

und dividiren wir beiderseitig durch das Flächenelement, so folgt das zweite Hertz'sche Gleichungssystem:

$$(II) \quad A\mu \frac{dL}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \text{ etc.}$$

für die anderen Coordinatenebenen gilt Analoges.

Ebenso lassen sich die Verhältnisse erläutern und die Gleichungen p. 280 ableiten in dem mehr complicirten Falle, wenn wir der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der Zustandsänderungen Rechnung tragen, wodurch wir die die Dispersionerscheinungen ergebenden Gleichungen erhalten. Wird eine Rolle rasch um einen gewissen Winkel gedreht, so werden zunächst nur die umgebenden Fäden gespannt; erst wenn die Spannungswelle die nächsten Rollen erreicht, werden auch diese in Bewegung versetzt etc.

7. Mechanische Bedeutung des electrischen Leitvermögens.

Eine gewisse Schwierigkeit in den bisherigen Theorien bietet die Frage, wodurch sich ein Leiter seinem inneren Wesen nach von einem Nichtleiter unterscheidet. Man hat gesagt, dass der Leiter die Feldenergie zusammenhält, damit aber offenbar nur eine Beobachtungsthatsache zum Ausdruck gebracht. Wir können nach Poynting einen Leiter ganz allgemein als einen Körper, sei es einen festen, flüssigen oder gasförmigen definiren, der im Stande ist, fortwährend eine theilweise Umwandlung der Energie des Feldes in Energie ungeordneter Bewegungen, in Wärmeenergie zu veranlassen. Während im freien Felde die einzelnen Aethertheilchen in die cyklische (Wirbel-)Bewegung hineingezogen werden, tritt an der Grenzfläche des freien Aethers gegen solchen, der an

Molecüle fester, flüssiger oder gastörmiger Körper gebunden ist, etwas ein, was mechanisch einer Gleitung entspricht, und wie diese mit einer Herabtransformation von Energie höherer Ordnung in solche niederer Ordnung, in Wärmebewegung verbunden ist. Gerade hierdurch erhält aber der Leiter die Eigenschaft, Energie geordneter Bewegung (des electromagnetischen Feldes) auf weite Strecken hin mit geringerem Verluste zu übertragen, als dies z. B. durch freie Strahlung möglich wäre, der Leiter wird so ein „Führer“ der Energie.

Der Mechanismus dieser Erscheinung dürfte sich folgendermaassen auffassen lassen:

Halten wir an der hier entwickelten Grundanschauung fest, so hat die Feldenergie des stromdurchflossenen Leiters die Form kinetischer Energie der Aethertheilchen, welche etwa längs seiner, ihn concentrisch umschliessenden magnetischen Kraftlinien wirbeln. In der That ist die zur Ausbildung des Feldes nöthige Arbeit bei einem Strome, der schliesslich bis zu der Stromstärke J gebracht wird, gleich $\frac{1}{2} L J^2$, wo L den Selbstinductionscoefficienten der Strombahn bezeichnet, ganz analog wie in einem Monocykel, dessen cykliche Geschwindigkeit den Werth q erreicht hat, die (kinetische) Energie $\frac{1}{2} M q^2$ vorhanden ist, wenn M das gesammte Trägheitsmoment bezeichnet. Schon Maxwell zeigte, dass die Centrifugalkräfte dieser Wirbel vollkommen ausreichen¹⁾, um die von Faraday geforderten Seitendrucke, den die wirbeldurchsetzten Aethermassen aufeinander ausüben, sowie die Zugspannungen in den Kraftlinien selbst zu erklären.²⁾ Die Kraftlinien suchen sich also nun den Leiter herum zusammen zu ziehen wie erweiterte Gummiringe. Wird den der Oberfläche zunächst gelegenen Wirbeln Energie entzogen, so müssen sie sich zusammen ziehen, denn nach H. v. Helmholtz ist das Product $Q k \cdot l$ aus Wirbelintensität (Querschnitt Q mal Wirbelgeschwindigkeit k) und Länge l eine Constante. An die frei werdenden Stellen drängen andere nach, andere schieben sich über dieselben hinweg wie

1) Cl. Maxwell, Phil. Mag. (4) 21. p. 165 ff.

2) Vgl. auch L. Grätz, der zeigte, dass man für die Durchmesser dieser Molecularwirbel sowie für die mit ihnen zusammenhängende Aetherdichte zu vollkommen plausiblen Werthen gelangt. Wied. Ann. 25. p. 165. 1885.

es die Wirbeltheorie zeigt. So ergibt sich aus rein mechanischen Ursachen die senkrecht zur Leiteroberfläche stattfindende Einwanderung von Energie aus dem Felde, von der Poynting zeigte, dass sie als wesentlicher Bestandtheil in der Maxwell'schen Theorie enthalten ist, sowie die Erscheinung der Fortleitung der Feldenergie. Der an den Moleculen der Leiteroberfläche eingeleitete Energieverlust wird das Führende für die Energie. Ein Kabel reinsten Kupfers von -273° Temperatur, bei der es seine Fähigkeit Energie geordneter Bewegungen in Wärmebewegung herab zu transformiren verliert, weil seine Moleculé sich nicht mehr gegeneinander verschieben, vermag nicht mehr als Führer¹ electricischer Feldenergie zu dienen, wir sagen „es leitet nicht mehr.“ (Vgl. die Versuche von Cailletet und Bouty, Wroblewski und Dewar die diesem Ziele mehr oder weniger nahe kamen). Bei den gewöhnlichen festen oder flüssigen Leitern des galvanischen Stromes bemerken wir nur das Endresultat, dass eine Heruntertransformation in Wärmebewegung stattgefunden hat, ohne einen Einblick in den Mechanismus dieser Transformation zu gewinnen, geradeso wenig wie wir beim Stoss die Transformation sichtbarer kinetischer Energie in Wärmeenergie verfolgen können. Wir sehen vor allem nicht, ob zunächst wesentlich nur intramoleculare (Luminescenz-)Bewegungen in den Moleculen angeregt werden, die sich dann erst in Wärmebewegungen umsetzen, oder die letzteren das Primäre sind. Hierüber gibt uns das Verhalten der Gase Aufschluss und zeigt, dass das Erstere der Fall ist. Bei verdünnten Gasen ruft jene Energietransformation unter günstigen Umständen ein Leuchten hervor und hier können wir jenen Process, der einen Körper zu einem Leiter, d. h. Führer von Feldenergie macht, direct mit dem Auge verfolgen. Ich weise hier auf die Versuche hin, die E. Wiedemann und ich selbst beschrieben haben;¹⁾ dort sieht man z. B. wie ein Energie in hinreichendem Maasse zerstreuer Strahlungsprocess die Kraftlinien zu Stellen hinzieht, wo sie nach den Gesetzen der Electrostatik oder denen der Ausbreitung rascher electricischer Schwingungen niemals von selbst hin gelangen könnten.

1) H. Ebert u. E. Wiedemann, Wied. Anu. 50. p. 1. 1893, namentlich p. 18 ff.

Dass gewisse Substanzen, vor allem die Leiter erster Classe und die Electrolyte in besonderem Maasse befähigt sind, die electromagnetische Energie zu verwandeln und zu sich heranzuziehen, dürfte mit der Eigenschaft zusammen hängen, dass unter dem Einflusse electriche Kräfte in ihnen eine Jonisation eintritt. Bei den Metallen dürfte die Leichtigkeit, mit der sie als einzelne Atome existiren können, von Einfluss sein. Dasselbe ist der Fall, wenn von vorn herein bereits freie Ionen vorhanden sind. Auch bei den Gasen scheint die Dissociirbarkeit der Molecüle eine grosse Rolle zu spielen.¹⁾

8. Anwendung auf Gasentladungen.

Die entwickelte Theorie des electriche Stromes scheint mir auch darüber Aufschluss zu geben, dass wir dazu gezwungen sind dem electriche Strome eine bestimmte Richtung zuzuschreiben, was vor allem bei den Erscheinungen der Gasentladungen in dem Gegensatze von Anode und Kathode zum Ausdruck kommt.

H. v. Helmholtz hat gezeigt, dass ein Wirbelring immer in dem Sinne fortschreitet, in dem sich die Theilchen durch seine Oeffnung hindurchbewegen, und dass ein auf eine Wand auftreffender Wirbelring nicht an derselben reflectirt wird, sondern an derselben haften bleibt und sich an ihr ausdehnt.²⁾ Erzeugen wir daher in einem an den Enden mit metallischen Electroden versehenen Entladungsrohre electriche Spannungen, so können nach unserer Grundannahme und in vollster Uebereinstimmung mit Maxwell diese Spannungen an den einzelnen Punkten des *Feldes* sich gar nicht ausbilden, ohne dass gleichzeitig überall Rotationsbewegungen, d. h. magnetische Bewegungen, Wirbel, auftreten. (Am Modelle von Fitzgerald lassen sich die vorher ungespannten Gummifäden im Dielec-

1) Vgl. H. Ebert u. E. Wiedemann, Wied. Ann. 50. p. 22. 1893. vgl. auch J. J. Thomson, Recent Researches in Electricity and Magnetism. Oxford 1893, namentlich p. 54 u. 56.

2) Hierin unterscheiden sich diese Wirbelringe principiell von elastischen Ringen, mit denen sie sonst viele Aehnlichkeiten haben. Weiter scheint mir hierin ein wesentlicher Unterschied in der hier vorgetragenen, rein kinematischen Theorie zu jenen Theorien begründet zu liegen, welche den Aether mehr oder weniger als elastisches Medium, wenn auch als quasi-elastisches betrachten.

tricum nur in den Zustand der Spannung versetzen, wenn einzelne Rollen gedreht werden.) Die zeitliche Aenderung, welche in der dielectrischen Polarisirung (displacement) hervorgebracht wird, ist gleich der Vertheilung der Rotation rings herum (p. 275). Um jedes durch die Electricitätsquelle in Spannung versetzte Theilchen des Mediums bildet sich also ein ringsherum gehender Wirbelring aus, dessen Ebene senkrecht zu der Richtung der electricischen Kraft liegt.

In verdünnten Gasen wandern die Wirbelringe im Sinne von der Anode nach der Kathode um beträchtliche Strecken ungestört fort, stauen sich an der Kathode und rufen hier Dauerbewegungen hervor, noch ehe die eigentliche Entladung einsetzt. Wird diese ausgelöst, so müssen sich an der Anode und Kathode verschiedene Erscheinungen ausbilden, wenn der Gasdruck niedrig genug ist, dass diese Dauerbewegungen eine Zeit lang erhalten bleiben und hinreichend ausgedehnte Partien der Umgebung in ihren Bewegungsprocess mit hineinziehen können. Wenden wir rasch ihre Grösse und Richtung wechselnde electricische Kräfte an, z. B. Hertz'sche Oscillationen, so erhalten wir zwei Kathoden.¹⁾ Die Kathode braucht nicht aus Metall zu bestehen; an jeder Wand (Glas, Siegelack), die dem Anprall der Molecularwirbel ausgesetzt ist, bilden sich die charakteristischen Kathodenerscheinungen aus.²⁾ So ergibt sich die Erklärung für eine ganze Reihe von Erscheinungen der Gasentladungen, auf Grund derselben Annahme, die zu sämtlichen anderen Phänomenen der Electrodynamik führt (Auftreten von Dauerbewegungen und Stauerscheinungen, die zu einem Erhitzen oder Zerstäuben des Kathodenmaterials führen können³⁾, Einfluss der Electricitätszufuhr und eine Reihe der von E. Wiedemann und mir beschriebenen Erscheinungen in gasverdünnten Räumen, die einem electricischen Hochfrequenzfelde ausgesetzt werden. Ueber andere hiermit zusammen-

1) H. Ebert u. E. Wiedemann, Wied. Ann. 50, p. 33. 1893.

2) l. c. p. 41.

3) Auf die Bedeutung der electricischen Oscillationen auf die Kathodenerscheinungen gehe ich an dieser Stelle nicht weiter ein (vgl. E. Wiedemann und H. Ebert, Sitzungsber. der Physikal.-med. Soc. zu Erlangen. Sitzung vom 14. Dec. 1891.

hängende Erscheinungen werden wir demnächst weiteres mittheilen und von der hier entwickelten Anschauung aus erklären.

Wir haben oben unsere Ableitung der Grundgleichungen der Electrodynamik gelegentlich eine „mechanische“ genannt. Was wir aber hauptsächlich dabei benutzt haben, sind die Ausdrücke (2) und (4) p. 274 und 276 für die Energien; die sogenannten Kräfte hätten wir ebensogut als blosse Factoren, aus denen die Energie zusammengesetzt ist, einführen können. Unsere Ableitung wäre dann eine rein „energetische“ im Sinne Ostwald's geworden und hätte auch solange rein energetisch bleiben können, als es sich nicht darum handelte, die speciellere Natur der Vorgänge in's Auge zu fassen und die Energiefactoren anschaulich zu deuten.

Jedenfalls dürfte gezeigt sein, dass man durch eine consequente Durchführung der cyklischen Theorie der magnetischen und electrischen Erscheinungen zu einer vollständigen und dabei einfachen Deutung dieser Erscheinungen gelangt.

Erlangen, October 1893.

3. Ueber die Gesetze der galvanischen Polarisation und Electrolyse; von O. Wiedeburg.

Ueberblickt man die bisher vorliegenden Arbeiten, die sich mit der Theorie der galvanischen Polarisation beschäftigen, so findet man, dass zu einer befriedigenden Gesamtdarstellung dieses ganzen Erscheinungsgebietes noch ziemlich viel fehlt. Gerade im wesentlichsten Punkte gehen die Meinungen auseinander: Unter welchen Bedingungen, nach welchen Gesetzen an der Grenze eines Leiters erster und eines solchen zweiter Klasse der Uebergang der Electricität zwischen den Ionen des Electrolyten und dem Stoffe der Electroden erfolgt, darüber bestehen noch heute verschiedene Ansichten. Da ist es denn nicht zu verwundern, wenn die experimentelle Behandlung des Gebietes eigenthümlichen Schwierigkeiten begegnet. „Bei Messungen im Gebiete der Polarisation ist es besonders wichtig, sich darüber klar zu werden, was man messen will“, sagt mit Recht Hr. Ostwald in der neuesten Auflage seines Lehrbuches.¹⁾ Man braucht nur die verschiedenen Zahlenwerthe zu betrachten, die bei den einzelnen Untersuchungen für das „Maximum der Polarisation in Schwefelsäure an Platinelectroden“ gefunden worden sind, um zu erkennen, dass der Mangel an Uebereinstimmung wohl zum grossen Theil durch den Mangel einer scharfen Definition der zu messenden Grössen verschuldet ist.

Im Folgenden will ich versuchen, in kurzen Zügen eine möglichst umfassende Darstellung unseres Gebietes in der Form mathematischer Analyse zu geben, um den Zusammenhang zwischen den einzelnen, der Beobachtung zugänglichen Grössen auch quantitativ zu ermitteln und so eine genaue Bestimmung der für die Polarisation maassgebenden *Constanten* zu ermöglichen.

1) W. Ostwald, Allg. Chemie 2. Aufl. 2. p. 973. 1893.

Ich hoffe, dass sich auf diesem Wege eine bessere „Erklärung“ der Polarisationserscheinungen im Kirchhoff'schen Sinne — als möglichst einfache und vollständige Beschreibung derselben — erzielen lassen wird, als sie bisher gegeben ist.

1. Das Wesentliche der galvanischen Polarisation besteht in dem Auftreten einer electromotorischen Gegenkraft an den Electroden, und um deren Einfluss auf den Stromverlauf soll es sich im Folgenden handeln. Daneben können auch Widerstandsänderungen im Voltameter sich geltend machen, wie es insbesondere bei kleinen drahtförmigen Electroden der Fall ist. Um diese letzteren, die eine besondere Erscheinungsgruppe bilden, von meinen Betrachtungen auszuschliessen, setze ich voraus, dass der Gesamtwiderstand des Stromkreises — nur dieser kommt in Betracht — unveränderlich gegeben, dass ferner für Constanterhaltung der Temperatur gesorgt sei, und die Electroden in Form von Platten mit einer auch im electrischen Sinne einfach bestimmbaren „Oberfläche“ verwendet werden.

2. Die Vorstellungen, von denen ich bei meinen Entwicklungen ausgehe, sind nun die folgenden: Durch die erregende electromotorische Kraft werden im Electrolyten die Ionen nach den beiden Electroden gedrängt; ihre Ansammlung erzeugt hier neue Potentialsprünge, die nun mit jener electromotorischen Kraft zusammen, ihr entgegengerichtet, den Stromverlauf nach dem Ohm'schen Gesetze bestimmen; es sammeln sich aber — das ist das Wesentliche meiner Annahmen — *nicht alle herangeführten Ionen an den Electroden electromotorisch wirksam an, sondern unter allen Umständen nur ein Bruchtheil derselben*, während der Rest „neutralisirt“ wird, seine Ionennatur verliert und zum Potentialsprung nichts beiträgt.

Wir müssen aus allem, was wir über die Polarisation wissen, schliessen, dass die Ansammlung der Ionen an den Electroden nur bis zu einer bestimmten endlichen Grenze gehen kann; ich nehme nun nach Analogie anderer Vorgänge an, dass in jedem Augenblick ein um so kleinerer Bruchtheil der herangeführten Ionenmenge sich ansammelt, je weniger die bereits angehäuften Menge sich von dem erreichbaren Grenze

werth unterscheidet, und setze *jenen Bruchtheil direct proportional der Differenz zwischen diesem Grenzwert und dem augenblicklichen Werth der Ansammlung.*

Dabei verzichte ich, um dies gleich zu bemerken, auf eine Erklärung oder Herleitung dieser Grundvorstellung aus andern, bekannten Vorgängen. Es kommt mir darauf an, zu zeigen, dass sich auf dieser hypothetischen Grundlage eine umfassende Beschreibung der Polarisationserscheinungen aufbauen lässt. Wenn die Erfahrungsthatfachen in den Folgerungen einer solchen formalen Theorie ihr getreues Spiegelbild finden, so wird dies am besten für die Brauchbarkeit der Grundanschauung sprechen. Es ist dann möglich, auf empirischem Wege die Werthe der maassgebenden Constanten zu ermitteln, und dann erst tritt die weitere Frage an uns heran, in welchem Zusammenhang diese letzteren mit anderen Constanten stehen, und welche Schlüsse aus ihren Gesetzmässigkeiten weiter sich ziehen lassen.

Mit den bisher erwähnten Annahmen allein lässt sich allerdings eine vollständige Darstellung der Erscheinungen nicht schaffen. Man weiss auch bereits, dass noch andere Vorgänge neben der eigentlichen Polarisation herlaufen, von ihr bedingt werden und auf sie zurückwirken; anderer Natur als sie, aber mit ihr eng verbunden, sind diese Nebenvorgänge von uns durch die Anordnung des Versuches zwar bis zu gewissem Grade zu beherrschen und zu leiten, aber wohl kaum je völlig zu beseitigen. Sie haben das gemeinsam, dass durch sie die an den Electroden angesammelte Ionenmenge und damit die electromotorische Gegenkraft der Polarisation unabhängig von der directen Stromwirkung verändert wird. Man fasst sie unter dem Namen der Occlusion bez. Convection zusammen, je nachdem sie durch die Natur der Electroden oder des Electrolyten bedingt sind. Insbesondere Hr. v. Helmholtz¹⁾ hat in einer Reihe von Arbeiten ihre Bedeutung theoretisch und experimentell klarzulegen sich bemüht; wir werden sie

1) H. v. Helmholtz, Pogg. Ann. 150. p. 483. 1873 (Wiss. Abh. 1. p. 823); 159. p. 416. 1876 (Wiss. Abh. 1. p. 835); Wied. Ann. 11. p. 737. 1880 (Wiss. Abh. 1. p. 899); 34. p. 737. 1888; Proc. Edinb. R. Soc. 10. p. 202. 1881; 12. p. 596. 1884; Berl. Akad. Ber. p. 647. 1883.

durch Annahme möglichst einfacher Grundgesetze in Rechnung zu ziehen suchen.

3. Als idealer Grenzfall möge nun zunächst der behandelt werden, wo man von diesen Nebeneinflüssen absieht, bez. wo diese während der Versuchsdauer sich noch nicht merklich machen.

Gegeben ist eine constante Kette von ganz beliebiger electromotorischer Kraft A , in ihren, im übrigen metallischen, Stromkreis eingefügt eine Zersetzungszone (Voltameter), gefüllt mit der Lösung irgend eines Electrolyten, in die zwei Metallplatten (z. B. aus Platin) tauchen, welche wir uns auf den abgekehrten Seiten mit einem isolirenden Ueberzug versehen denken, sodass nur die einander zugekehrten — von der Oberfläche s_1 bez. s_2 — als Uebergangsstellen des Stromes in Betracht kommen. Der gesammte unveränderliche Widerstand des Stromkreises werde mit W bezeichnet, die während des Zeitelementes dt durch irgend einen Querschnitt des Kreises hindurchgehende Electricitätsmenge — als Differential der seit $t=0$ durchgegangenen Menge q — mit dq . Dann wird während dt von der Seite des Electrolyten her an die Kathode die Electricitätsmenge $+dq$ (nämlich, wenn n die Ueberführungszahl des Anions, $(1-n)dq$ durch das Zuwandern von Kationen, ndq durch das Fortwandern von Anionen), an die Anode $-dq$ herantreten, jede nach Faraday's electrolytischem Grundgesetz zu gleichen Theilen $\pm e$ auf eine bestimmte Anzahl Ionen vertheilt und im Electrolyten nur mit diesen beweglich. Von beiden Mengen sammelt sich ein Theil ohne weitere Veränderung an den Electroden an, ein anderer wird neutralisirt, indem er seine electricische Ladung mit einer entgegengesetzt gleichen, aus der Electrode entnommenen ausgleicht.

Bezeichnet man nun mit j_1 bez. j_2 die zur Zeit t vorhandenen polarisirenden Ionenmengen (die wir uns etwa im Electrolyten mit einer von der Electrode aus sehr rasch abnehmenden Dichtigkeit über eine kleine Strecke δ hin vertheilt zu denken haben), mit r_1 bez. r_2 die bis zu diesem Zeitpunkte bereits neutralisirten — beide bezogen auf die Flächeneinheit der Electrode, so bestehen die Beziehungen:

$$(1) \quad \begin{cases} + \frac{dq}{s_1} = + \varepsilon (dj_1 + dr_1), \\ - \frac{dq}{s_2} = - \varepsilon (dj_2 + dr_2). \end{cases}$$

Ist ferner m_1 bez. m_2 der Grenzwert, den j_1 bez. j_2 überhaupt nur erreichen kann, so lässt sich unsere obige Grundannahme über das Gesetz der Ansammlung mathematisch darstellen in der Form:

$$(2) \quad \begin{cases} \varepsilon dj_1 = \varepsilon \beta_1 (m_1 - j_1) \cdot \frac{dq}{s_1}, \\ \varepsilon dj_2 = \varepsilon \beta_2 (m_2 - j_2) \cdot \frac{dq}{s_2}, \end{cases}$$

wo β_1 und β_2 nur von der Natur und Temperatur des Electrolyten und der Electroden abhängige Constanten von der Dimension $\frac{\text{Fläche}}{\text{Electricitätsmenge}}$.¹⁾ Wenn wir nun weiter annehmen, dass, im Falle noch gar keine Ansammlung vorhanden ist ($j_1 = j_2 = 0$), die ganze herangeführte Menge sich ansammelt, so haben wir zu setzen:

$$\varepsilon \beta_1 \cdot m_1 = \varepsilon \beta_2 \cdot m_2 = 1,$$

und die Gleichungen (2) vereinfachen sich zu

$$(3) \quad \begin{cases} \varepsilon dj_1 = (1 - \varepsilon \beta_1 j_1) \frac{dq}{s_1}, \\ \varepsilon dj_2 = (1 - \varepsilon \beta_2 j_2) \frac{dq}{s_2}. \end{cases}$$

Aus (1) folgt dann sofort für das Anwachsen der neutralisirten Mengen:

$$(4) \quad dr_1 = \beta_1 j_1 \frac{dq}{s_1}, \quad dr_2 = \beta_2 j_2 \frac{dq}{s_2},$$

Gleichungen, die in ihrer Form unmittelbar an die für gewöhnliche chemische Reactionen gültigen erinnern.

Die vor den Electrodenflächen vorhandenen Electricitätsmengen bilden mit entgegengesetzt gleichen, aus dem Innern der Electrode herangetretenen electricische Doppelschichten und erzeugen somit zwei Potentialsprünge p , die der Stärke jener Ansammlung proportional gesetzt werden mögen:

$$(5) \quad p_1 = + \frac{e_1}{2} \varepsilon j_1, \quad p_2 = - \frac{e_2}{2} \varepsilon j_2,$$

1) Die Einführung der Proportionalitätsconstanten $\varepsilon \beta$ und εc gerade in dieser Form erfolgt aus später ersichtlichen praktischen Gründen.

beide im selben Sinne — Electrolyt minus Electrode — gerechnet. Diese Annahme hat man von jeher gemacht, sie liegt den Rechnungen von Hrn. Kohlrausch¹⁾, Herwig²⁾ u. a. zu Grunde, man unterschied aber nicht einen angesammelten und einen neutralisirten Theil der herangeführten Ionenmenge.

Die Stromstärke dq/dt wird nun in jedem Augenblicke dem Ohm'schen Gesetze gemäss derart bestimmt, dass

$$W \cdot \frac{dq}{dt} = A - p_1 + p_2,$$

oder also

$$(6) \quad W \cdot \frac{dq}{dt} = A - \frac{c_1}{2} \varepsilon j_1 - \frac{c_2}{2} \varepsilon j_2.$$

Während durch diese Gleichung der Einfluss von j_1 und j_2 auf q dargestellt wird, geben die obigen Gleichungen

$$(3) \quad \begin{cases} \varepsilon dj_1 = (1 - \varepsilon \beta_1 j_1) \frac{dq}{s_1}, \\ \varepsilon dj_2 = (1 - \varepsilon \beta_2 j_2) \frac{dq}{s_2} \end{cases}$$

umgekehrt den Einfluss von q auf j_1 und j_2 wieder. Die drei zusammen bilden ein System gleichzeitiger Differentialgleichungen, aus denen die drei Grössen j_1 , j_2 und q als Functionen von t zu bestimmen sind. Die Gleichungen (4) liefern dann weiter die Abhängigkeit der neutralisirten Ionenmengen r_1 und r_2 von t .

4. Man erhält zunächst unmittelbar die an jeder Electrode zur Zeit t vorhandene Ionenmenge und damit nach (5) den dort herrschenden Potentialsprung als Function der bis dahin durch einen beliebigen Querschnitt des Stromkreises geflossenen Electricitätsmenge q ; denn aus (3) folgt:

$$\log (1 - \varepsilon \beta_1 j_1) = - \frac{\beta_1}{s_1} \cdot q + \text{const.},$$

also

$$\varepsilon j_1 = \frac{1}{\beta_1} \left(1 - C_1 \cdot e^{-\frac{\beta_1}{s_1} q} \right),$$

mithin

$$p_1 = \frac{c_1}{2\beta_1} \left(1 - C_1 e^{-\frac{\beta_1}{s_1} q} \right)$$

1) F. Kohlrausch, Pogg. Ann. 148. p. 143. 1873.

2) H. Herwig, Wied. Ann. 2. p. 566. 1877.

Wir wollen nun behufs Abkürzung der Schreibweise festsetzen, dass wir bei der Messung der Potentialdifferenzen die natürliche, ohne Stromdurchgang an der Electrode herrschende zum Ausgangspunkt nehmen, also gleich 0 setzen; dann bestimmt sich die Integrationsconstante C_1 daraus, dass für $q = 0$ $p_1 = 0$ sein soll, zu $C_1 = 1$.

Setzt man noch zur weiteren Abkürzung

$$(7) \quad c_1 = P_1 \cdot \beta_1,$$

so lässt sich obige Gleichung schreiben:

$$p_1 = \frac{P_1}{2} \left(1 - e^{-\frac{\beta_1}{a_1} q} \right);$$

analog ergibt sich:

$$p_2 = -\frac{P_2}{2} \left(1 - e^{-\frac{\beta_2}{a_2} q} \right),$$

mithin die gesammte Potentialdifferenz des Voltameters zu:

$$(8) \quad p = \frac{P_1}{2} \left(1 - e^{-\frac{\beta_1}{a_1} q} \right) + \frac{P_2}{2} \left(1 - e^{-\frac{\beta_2}{a_2} q} \right).$$

Leitet man also nacheinander zunehmende Electricitätsmengen q durch ein Voltameter, so findet man dessen Potentialdifferenz p anwachsend erst rasch, dann immer langsamer von 0 bis zu einem Maximum $(P_1 + P_2)/2$, das streng erst für $q = \infty$, praktisch schon bei endlichen q erreicht wird. Vorausgesetzt ist dabei, dass der Durchgang von q in so kurzer Zeit erfolgt, dass währenddem die oben erwähnten, immer verhältnissmässig langsamen Nebenvorgänge keinen merklichen Einfluss auf die Ansammlung der Ionen ausüben.

Dergleichen Versuche sind von Hrn. Bartoli¹⁾ ausgeführt worden: Die mittels eines Unterbrechers während etwa 0,0004 Sec. durch das Voltameter geleiteten Electricitätsmengen q wurden durch den Ausschlag eines ballistischen Galvanometers gemessen, in gleicher Weise die Potentialdifferenz entweder der beiden Electroden gegeneinander (p) oder die einer einzelnen gegen eine gleichartige unpolarisirte (p_1 bez. p_2). Zu diesem Zwecke wurden die betreffenden beiden

1) A. Bartoli, Nuov. Cim. (3) 7. p. 234. 1880; Beibl. 4. p. 794. 1880.

Electroden durch den Unterbrecher unmittelbar nach dem Durchgang von q für eine gleichfalls sehr kleine, unveränderliche Zeit mit einem empfindlichen Galvanometer und einem sehr grossen Widerstand zu einem Stromkreis geschlossen, so dass die ballistischen Ausschläge die Potentialdifferenz relativ zu einem Normalelement ergaben. Bartoli fand so auf rein empirischem Wege den Zusammenhang zwischen den p und q dargestellt durch obige Formeln für verdünnte und concentrirte H_2SO_4 , sowie für wässrige Lösungen von NH_3 , HCl , HBr , HJ zwischen (unangreifbaren) Electroden von Platin, Palladium, Gold und Graphit.

Es zeigte sich aber weiter, dass in allen diesen Fällen bei Electroden gleicher Oberfläche für beliebige q stets $p_1 = -p_2$ war, solange nicht augenscheinliche chemische Veränderungen stattfanden, wie z. B. bei nicht mehr ganz frischen Lösungen von HBr und HJ . Ich möchte es als eine sehr wahrscheinliche Annahme hinstellen, dass ein solches Verhalten ganz allgemein überall da statt hat, wo nicht schon in diesen sehr kurzen Zeiten merkliche Reactionen die Ionenmenge beeinflussen. Man hat dann also — und das soll im Folgenden stets geschehen:

$$P_1 = P_2 = P \text{ und } \beta_1 = \beta_2 = \beta$$

zu setzen, also nach (7) auch

$$c_1 = c_2 = c.$$

Die Ausdrücke für die Potentialdifferenzen vereinfachen sich danach: im Falle die beiden Electroden gleiche Oberfläche haben ($s_1 = s_2 = s$), erhält man die Potentialdifferenz des Voltameters zu:

$$(9) \quad p = P \left(1 - e^{-\frac{\beta}{s} q} \right).$$

Die Differentialgleichungen des ganzen Polarisationsvorganges gehen, wenn man noch

$$\frac{j_1 + j_2}{2} = j$$

einführt, über in:

$$(10) \quad W \frac{dq}{dt} = A - c \varepsilon j,$$

$$(11) \quad \varepsilon dj = (1 - \beta \varepsilon j) \frac{dq}{s}.$$

5. Wenn man nun auf Grund dieser Gleichungen die Beschreibung der Erscheinungen weiter führen und z. B. die Abhängigkeit der Strommenge q und der Stromstärke dq/dt von der Zeit t herleiten will, so muss man sich dessen wohl bewusst sein, dass man damit immer weiter von der Wirklichkeit sich entfernt und einen wohl kaum zu realisierenden idealen Grenzfall behandelt. Denn je grösser der in Betracht kommende Zeitraum t , desto mehr werden sich jene Nebenerscheinungen geltend machen und den Verlauf abändern. Ich führe die Rechnung zunächst in dieser Weise durch, um dann zur Besprechung der Aenderungen überzugehen, die man an unseren bisherigen Grundbetrachtungen anzubringen hat.

Eine Differentialgleichung für j allein erhält man durch Substitution von dq aus (10) in (11), nämlich:

$$\frac{\epsilon dj}{(A - c\epsilon j)(1 - \beta\epsilon j)} = \frac{dt}{Ws};$$

durch Zerlegung in Partialbrüche ergibt sich die Form:

$$d \log \frac{1 - \beta\epsilon j}{A - c\epsilon j} = \frac{c - \beta A}{Ws} dt;$$

daraus folgt weiter:

$$\frac{1 - \beta\epsilon j}{A - c\epsilon j} = C e^{-\frac{A\beta - c}{Ws} t}.$$

Gemäss unserer Festsetzung über den Ausgangspunkt der Zählung muss für $t = 0$ auch $j = 0$ sein; das erfordert $C = 1/A$; danach wird:

$$\epsilon j = \frac{1 - e^{-xt}}{\beta - \frac{c}{A} e^{-xt}}, \quad \text{wo } x = \frac{A\beta - c}{Ws};$$

durch Einführung von $P = c/\beta$ lässt sich die Gleichung schreiben:

$$(12) \quad \epsilon j = \frac{A}{\beta} \cdot \frac{1 - e^{-xt}}{A - P e^{-xt}}, \quad \text{wo } x = \frac{A - P}{Ws} \cdot \beta.$$

Auf Grund von (9) und (10) findet sich nun:

$$(13) \quad e^{-\frac{\beta}{s} q} = \frac{(A - P) e^{-xt}}{A - P e^{-xt}}$$

und

$$(14) \quad \frac{dq}{dt} = \frac{A}{W} \cdot \frac{A - P}{A - P e^{-xt}},$$

die Strommenge q und die Stromstärke dq/dt als Functionen der Zeit darstellend.

Bei der näheren Erörterung dieser Abhängigkeit hat man von vornherein zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem nämlich:

$$x < 0 \text{ oder } x > 0, \text{ d. h. } A < P \text{ oder } A > P.$$

Betrachten wir zunächst den ersten Fall:

$$A < P \text{ also } x < 0.$$

Mit wachsendem t wächst e^{-xt} von 1 bis $+\infty$, danach ergibt sich aus (13) ein endlicher Grenzwert Q von q , derart, dass

$$e^{-\frac{\beta}{s}q} = \frac{P-A}{P},$$

also

$$(15) \quad A = P \left(1 - e^{-\frac{\beta}{s}q} \right).$$

Weiter findet man:

$$\left(\frac{dq}{dt} \right)_{t=0} = \frac{A}{W}, \quad \left(\frac{dq}{dt} \right)_{t=\infty} = 0,$$

d. h. die Stromstärke nimmt vom polarisationsfreien Anfangswert A/W ab bis auf 0, wo dann natürlich, wie die vorige Gleichung besagt, die ausgebildete Polarisation gleich der erregenden electromotorischen Kraft ist; in praxi wird dieser Endzustand schon bei endlichen Werthen von t erreicht. Je schneller dieses Absinken erfolgt, um so mehr wird der Vorgang der Ladung eines Condensators durch die Electricitätsmenge Q vergleichbar sein.

Geht man über zum zweiten Fall:

$$A > P, \text{ also } x > 0,$$

so nimmt jetzt mit wachsendem t e^{-xt} von 1 bis 0 ab. Die in unendlicher Zeit durch den Stromkreis fließende Electricitätsmenge ergibt sich als unendlich gross, während die Stromstärke vom Anfangswert

$$\left(\frac{dq}{dt} \right)_{t=0} = \frac{A}{W} \text{ zum Endwerth } \left(\frac{dq}{dt} \right)_{t=\infty} = \frac{A-P}{W}$$

abnimmt. Es bleibt also hier ein endlicher Strom bestehen, bei welchem der beliebig hoch ($> P$) zu wählenden electro-

motorischen Kraft A stets dieselbe, Polarisationskraft P entgegenwirkt.

Noch eine Bemerkung möchte ich hier anfügen: Um die Polarisation durch Kationen und Anionen gesondert zu untersuchen, hat man wohl auch zu dem Mittel gegriffen, der einen der beiden Electroden im Vergleich zur anderen eine sehr grosse Oberfläche zu geben; dann wird an dieser immer nur eine verhältnissmässig geringe Ionendichtigkeit herrschen, und der Vorgang wird wesentlich durch die Polarisation der kleinen Electrode bestimmt. Man kann diesen Fall analytisch genau so wie eben den zweier gleicher Electroden behandeln, da sich durch Vernachlässigung von z. B. j_2 gegen j_1 die Gleichungen in der Form ergeben:

$$(16) \quad \begin{cases} W \cdot \frac{dq}{dt} = A - \frac{c}{2} \epsilon j_1, \\ \epsilon dj_1 = (1 - \beta \epsilon j_1) \frac{dq}{s_1}. \end{cases}$$

Man hat dann nur in den Endgleichungen $P/2$ statt P zu setzen. Je nachdem man die kleine Electrode zur Kathode oder zur Anode macht, erhält man nun im Fall 1 ($A < (P/2)$) einen Zusammenhang zwischen positivem Q und positivem A bez. zwischen negativem Q und negativem A , beidemal in derselben Form wie oben Gleichung (15).

In dieser Weise hat Hr. Blondlot¹⁾ den Fall 1 einer Untersuchung in quantitativer Beziehung unterworfen. Vermittels eines Fallpendels verband er für sehr kleine Zeiten (von der Ordnung 0,01 Sec.) ein Voltameter mit zwei veränderlichen Punkten des Stromkreises einer Kette, um so beliebig kleine electromotorische Kräfte A zu verwenden; die währenddem durch das Voltameter gegangene Electricitätsmenge q ergab sich mit der Schlusszeit anwachsend bis zu einem Maximum, das man genügend genau als Q ansehen kann. Die graphische Darstellung, die Hr. Blondlot für die Beziehung zwischen Q und A an Stelle eines analytischen Ausdruckes gibt, lässt vermuthen, dass man es mit den Anfangsstücken der Curve

$$A = \frac{P}{2} \left(1 - e^{-\frac{P}{2} q} \right)$$

1) R. Blondlot, Journ. de Phys. (1) 10. p. 277. 333. 434. 1881.

zu thun hat. Aus welchem Grunde Blondlot dem negativen Theil derselben einen Wendepunkt zuschreibt, ist mir nicht erfindlich, da in dieser Beziehung keinerlei Zahlenmaterial mitgetheilt wird. Im übrigen stimmen Blondlot's Versuche mit denen Bartolis überein, was das Verhältniss der anodischen und kathodischen Polarisation zu einander betrifft: er findet die Grösse $(dA/dQ)_{Q=0}$ für beiden Polarisationen gleich; da nach Obigem

$$\left(\frac{dA}{dQ}\right)_{Q=0} = \frac{P\beta}{2s_1} = \frac{c}{2s_1},$$

so bedeutet das die Gleichheit von c . Man kann $2/c$ als die „Initialcapacität“ der Electrode (für die Flächeneinheit) bezeichnen, und Blondlot stellt daher den Satz auf: „Die Initialcapacität ist unabhängig von der Richtung der Polarisation.“

Da gegenüber Bartoli's Messungen diejenigen Blondlot's schon eine erheblich grössere Zeit beanspruchen (einige hundertstel Secunden gegenüber etwa einem tausendstel), so ist es nicht zu verwundern, dass bei ihnen sich chemische Reactionen leichter geltend machen, als bei jenen; ich komme darauf noch zurück.

6. Der Fall $A = P$ trennt, wie oben ausgeführt, die Fälle der condensatorischen Ladung eines Voltameters von denen, wo ein dauernder Strom zu Stande kommt. Das stromanzeigende Galvanometer muss uns also zur Kenntniss des Werthes P verhelfen können: Solange die verwendete electromotorische Kraft A kleiner als P ist, geht es nach dem ersten Ausschlag beim Stromschluss *vollkommen* in seine Ruhelage zurück, überschreitet aber A den Werth P auch nur wenig, so bleibt eine dauernde Ablenkung übrig, die mit zunehmendem A rasch anwächst.

Einen solchen Uebergang beobachtet man in der That, freilich nicht in so schroffer Form — wir werden später sehen, warum. Es ist das die Erscheinung, deren Untersuchung und Verwerthung von Hrn. Le Blanc¹⁾ in umfassender Weise unternommen worden ist.

Dazu möchte ich zweierlei bemerken, zunächst: Stellen

1) M. Le Blanc, Zeitschr. f. physik. Chem. 8. p. 299. 1891.

die obigen Rechnungen die Polarisationserscheinungen vollkommen dar, so ist jener kritische Werth der electromotorischen Kraft identisch mit dem Polarisationsmaximum und lehrt uns also diesem gegenüber nichts Neues. Vielleicht wäre diese Art der Bestimmung von P aus praktischen Gründen den sonst gebräuchlichen vorzuziehen. Ferner aber: Es liegt durchaus kein Grund vor, aus der Existenz eines solchen Schwellenwerthes den Schluss zu ziehen, dass zur Neutralisation der Ionen, zur „Zersetzung“ des Electrolyten eine electromotorische Kraft bestimmter Höhe erforderlich sei, wie das Hr. Le Blanc thut. Im vorstehenden wurde die Beschreibung der Erscheinungen gegründet auf die Annahme, dass schon bei beliebig kleiner electromotorischer Kraft eine theilweise Neutralisation der an die Electroden herangeführten Ionenmengen stattfindet; es hat sich auch auf dieser Grundlage ergeben, dass ein kritischer Werth der electromotorischen Kraft existiren muss, oberhalb dessen der Stromverlauf ein anderer ist als unterhalb.

Für das Verhalten des Galvanometers ist es ja auch gleichgültig, welches Schicksal die durch seine Windungen hindurchgegangenen Electricitätsmengen an den Electroden erfahren. Es kann uns keinen Aufschluss darüber geben, ob diese Electricitätsmengen sich insgesamt mit den entgegengesetzt gleichen Ladungen der Ionen zu Doppelschichten binden, oder ob sie etwa theilweise mit solchen unter „Abscheidung“ der Ionen sich ausgleichen. Wohl aber muss das Galvanometer es uns anzeigen, wenn der electricische Vorgang im Electrolyten aufhört, seinem Fortschreiten selbst Hindernisse zu schaffen, d. h. wenn das Polarisationsmaximum erreicht ist.

Gegenüber der Anschauung, dass eine bestimmte Höhe der stromerregenden electromotorischen Kraft zur Neutralisation der Ionen erforderlich sei, ist übrigens schon von verschiedenen Seiten darauf hingewiesen worden, dass man nicht für alle Theilchen des Electrolyten die Verhältnisse gleich zu setzen brauche. Hr. G. Wiedemann¹⁾ nimmt eine verschiedene Stärke der intramolecularen Bewegung an, derart, dass bei einzelnen, in dieser Beziehung einmal besonders günstig ge-

1) G. Wiedemann, Electr. 3. Aufl. 2. p. 917. 1863.

stellten Moleculen schon eine sehr geringe Kraft genügt, die dauernde Trennung der Bestandtheile zu erzwingen. Damit stimmt im wesentlichen eine Ansicht überein, die Hr. Bartoli¹⁾ gelegentlich ausgesprochen hat. In ganz ähnlicher Weise schreibt Hr. Arons²⁾ den einzelnen gleichartigen Ionen eine verschieden starke „Bindung der Electricität“ zu. Auch Hr. Fromme³⁾ zieht aus seinen Versuchen den Schluss, dass schon durch die kleinsten electromotorischen Kräfte eine Zerlegung des Electrolyten erfolge, glaubt aber, dass ein Theil des „ausgeschiedenen“ Gases die Polarisation hervorruft.

Diese verschiedenen Ansichten können alle mathematisch wiedergegeben werden durch meine obige Annahme, dass in jedem Falle ein bestimmter Bruchtheil der Ionen an den Electroden neutralisirt werde. Die Erfahrung steht mit den Folgerungen aus dieser Annahme, soweit wir bisher gesehen haben, nicht im Widerspruch.

7. Gehen wir nun dazu über, diese Folgerungen, die sich bisher auf den *Stromverlauf* beschränkten, auch in der *electrochemischen* Richtung zu ziehen, indem wir nach der Menge der unter bestimmten Umständen neutralisirten Ionen fragen. Die Antwort erhalten wir am einfachsten, wenn wir die von $t=0$ bis $t=t$ neutralisirte Menge sr (wir setzen $(r_1 + r_2)/2 = r$) berechnen als Differenz zwischen der in dieser Zeit überhaupt an die Electrode herangetretenen Menge q/s und der zur Zeit $t=t$ noch hier unverändert vorhandenen sj :

$$sr = \frac{q}{s} - sj.$$

Nach Gleichung (12) und (13) ergibt sich:

$$(17) \quad sr = \frac{s}{\beta s} \left\{ \log \frac{A - P e^{-xt}}{(A - P) e^{-xt}} - A \frac{1 - e^{-xt}}{A - P e^{-xt}} \right\}.$$

Im Falle der „condensatorischen“ Ladung, also für $x < 0$, findet man die gesammte bis $t = \infty$ neutralisirte Menge zu:

$$(18) \quad sR = \frac{s}{\beta s} \left\{ \log \frac{P}{P - A} - \frac{A}{P} \right\}.$$

1) A. Bartoli, Nuov. Cim. (3) 11. p. 193. 1882; Beibl. 6. p. 804.

2) L. Arons, Wied. Ann. 41. p. 473. 1890.

3) C. Fromme, Wied. Ann. 30. p. 503. 1887.

Diese ergibt sich danach, wenn man die später¹⁾ zu besprechenden Zahlenwerthe einführt, ungeheuer klein, von der Ordnung 10^{-11} gr.-Aeq. auf 1 qcm der Electrode, eine wohl kaum nachweisbare Grösse.

Für den Fall der eigentlichen „Electrolyse“ ($x > 0$) kommt es auf das Verhältniss sr/q an; man hat nach Obigem:

$$(19) \quad \frac{sr}{q} = \frac{1}{s} \left\{ 1 + \frac{A}{e^{\log \frac{(A-P)e^{-xt}}{A-Pe^{-xt}}}} \cdot \frac{1-e^{-xt}}{A-Pe^{-xt}} \right\};$$

da schon für verhältnissmässig kleine Werthe von t , falls $A-P$ nicht gar zu klein, e^{-xt} verschwindend klein wird (vgl. unten p. 44), so kann man praktisch stets setzen:

$$(20) \quad \frac{sr}{q} = \frac{1}{s},$$

d. h. „die gesammte neutralisirte Ionenmenge ist proportional der durch den Stromkreis geflossenen Electricitätsmenge“.

Wir erhalten das sogenannte erste Faraday'sche Gesetz. Als *streng* gültig erweist sich dasselbe aber natürlicherweise nicht. Sieht man das eigentliche Wesen der Faraday'schen Gesetze in der Grundanschauung, dass jedes Ion mit einer bestimmten, für alle gleichartigen und weiterhin auch für alle gleichwerthigen Ionen gleichen, Electricitätsmenge wandert — wie wir das oben auch angenommen haben —, so ist damit eben noch gar nichts über das Verhältniss der zersetzenden Wirkung des Stromes zur Strommenge gesagt. Dies wird vielmehr noch durch besondere Umstände geregelt, die wir oben in unserer Grundhypothese darzustellen suchten.

Welcher Bruchtheil der neutralisirten Ionenmenge sich aus der Lösung „abscheidet“, als fester oder gasförmiger Körper wirklich *sichtbar* wird, das hängt natürlich in erster Linie von dem Lösungsvermögen der electrolytischen Flüssigkeit ab; wir werden später darauf zurückzukommen haben.

8. Wir haben bisher stets angenommen, dass eine Veränderung der an den Electroden angehäuften Ionenmengen nur durch rein electriche Einflüsse stattfindet. Es gilt jetzt, auch jene anderen Erscheinungen in Rechnung zu ziehen,

1) Vgl. unten p. 343.

deren Einfluss auf den Vorgang der Polarisation sich nicht leugnen lässt. Ihr Wesen ist, wie schon erwähnt, insbesondere von Hrn. v. Helmholtz untersucht und besprochen worden; für uns handelt es sich hier darum, sie in den Rahmen unserer analytischen Erörterungen einzufügen, um zu einer auch quantitativen Darstellung ihrer Wirkung zu gelangen.

Wir denken uns die Ionen als eine Grenzschicht sehr geringer Dicke vor der Electrode angehäuft; sie können im allgemeinen nach beiden Seiten hin sich unter gewissen Bedingungen entfernen und damit als Bestandtheil der polarisirenden Schicht verschwinden. Sie können in die Electrode durch Occlusion, in den Electrolyten durch Convection fortgeschafft werden.

Betrachten wir zunächst den ersten Fall; seit Graham wissen wir, dass Wasserstoff vom Palladium in grosser Menge aufgenommen werden kann; später fand man, dass auch dem Platin, Eisen, Nickel diese Fähigkeit, Wasserstoff zu occludiren, freilich in geringerem Grade, zukomme. Auch der Sauerstoff scheint z. B. vom Platin occludirt zu werden. Vielleicht gilt ein gleiches noch für andere Gase und Metalle.¹⁾ Aus allen diesbezüglichen Beobachtungen geht das eine wohl unzweifelhaft hervor, dass eine solche Aufnahme nur dann stattfindet, wenn das Gas „in statu nascendi“ oder also *als Ion* an das Metall herantritt. Es verbreitet sich dann das occludirte Gas von der Oberfläche des Metalles in dessen Inneres, und ist im Stande, auch wieder als Ion irgendwo an die Oberfläche zurück- und unter Umständen aus dem Metall auszutreten. Das zeigen besonders deutlich die Versuche der Hrn. Bellati und Lussana²⁾, die den Durchgang von Wasserstoffionen durch Eisen in mannichfacher Weise beobachteten. Hr. Thoma³⁾ hat dann insbesondere für Palladium die Verhältnisse in quantitativer Beziehung untersucht, die unter bestimmten Bedingungen aufgenommenen und abgegebenen Wasserstoffmengen ermittelt. Er zeigte, dass für jede Stromstärke — wenn man die Ionen

1) Vgl. C. Fromme, Wied. Ann. 30. p. 503. 1887 und K. R. Koch, Wied. Ann. 42. p. 77. 1891.

2) M. Bellati u. S. Lussana, Atti R. Ist. Ven. (7) 1. p. 1173. 1890; Beibl. 15. p. 333.

3) M. Thoma, Zeitschr. f. physik. Chem. 3. p. 69. 1889.

auf electrischem Wege an das Metall führt — ein bestimmter maximaler „Uebersättigungsgrad“ besteht, derart, dass schon bei einer Stromverminderung ein Theil des occludirten Gases wieder aus dem Metall austritt. Ich glaube, dass man nach alledem den Einfluss dieses Vorganges auf die Polarisirung der Electroden sich gegebenenfalls folgendermaassen vorzustellen hat:

Die beim Herantreten an die Electroden *neutralisirten* Ionenmengen kommen in keiner Weise für die Occlusion in Betracht, dagegen wird von den *sich ansammelnden* Ionenmengen j fortwährend ein Theil von der Electrode absorbiert. Wir wollen den in der Zeiteinheit aufgenommenen Theil *proportional annehmen der Dichtigkeitsdifferenz, welche die vor der Electrode angehäuften und die in der ersten Schicht derselben occludirten Ionen aufweisen*. Erstere Dichtigkeit haben wir, da die Menge j sich in einer sehr kleinen Schicht von der Dicke δ findet, gleich j/δ zu setzen, letztere werde mit σ bezeichnet, die Proportionalitätsconstante, der „Occlusionscoefficient“ mit ω ; wir haben dann für das Zeitelement dt eine Veränderung von j in Rechnung zu ziehen von der Grösse:

$$\partial j_1 = -\omega_1 \left(\frac{j_1}{\delta_1} - \sigma_1 \right) dt,$$

$$\partial j_2 = -\omega_2 \left(\frac{j_2}{\delta_2} - \sigma_2 \right) dt,$$

um diese (mit ϵ zu multiplicirenden) Grössen sind also die rechten Seiten der Gleichungen (3) zu vermehren.

Die in die Electroden übergetretenen Ionen verbreiten sich nun diffundirend in das Innere derselben (in Richtung der $+x$ -Axe). Für diese Diffusion wollen wir das dem Fourier'schen Wärmeleitungsgesetz analoge Fick'sche Gesetz als gültig voraussetzen. Bezeichnet ρ die Dichtigkeit der occludirten Ionen in der Tiefe x von der Oberfläche der Electrode zur Zeit t , so gelten also die Differentialgleichungen:

$$(21) \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = \kappa_1 \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x_1^2}, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} = \kappa_2 \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial x_2^2}$$

Bei ihrer Integration hat man, da die in die Electrode eintretenden Mengen unserer Annahme über die Occlusionsgeschwindigkeit unterliegen, zunächst die Grenzbedingungen zu beachten:

$$(22) \quad \begin{cases} -x_1 \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial x_1} \right)_{x_1=0} = \omega_1 \left(\frac{j_1}{\delta_1} - \varrho_1 x_1 = 0 \right), \\ -x_2 \left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial x_2} \right)_{x_2=0} = \omega_2 \left(\frac{j_2}{\delta_2} - \varrho_2 x_2 = 0 \right), \end{cases}$$

(σ bedeutet ja den Werth von ϱ für $x = 0$), daneben ist auf die Bedingungen Rücksicht zu nehmen, die für den Anfangszustand der Electrode und die Vorgänge an ihren sonstigen, nicht zum Stromübergang dienenden Grenzflächen gültig sind, und die natürlich von Fall zu Fall besonders gegeben sein müssen.

Unser Problem ist also, wenn wir den Einfluss der Occlusion berücksichtigen, analytisch formulirt durch ein System von fünf gleichzeitigen (zum Theil partiellen) Differentialgleichungen, nämlich die durch das Ohm'sche Gesetz gegebene:

$$(6) \quad W \frac{dq}{dt} = A - \frac{c}{2} \varepsilon (j_1 + j_2),$$

die beiden für die j gültigen:

$$(23) \quad \begin{cases} \varepsilon dj_1 = (1 - \beta \varepsilon j_1) \frac{dq}{s} - \varepsilon \omega_1 \left(\frac{j_1}{\delta_1} - \sigma_1 \right) dt, \\ \varepsilon dj_2 = (1 - \beta \varepsilon j_2) \frac{dq}{s} - \varepsilon \omega_2 \left(\frac{j_2}{\delta_2} - \sigma_2 \right) dt, \end{cases}$$

sowie die Gleichungen (21) für die ϱ .

Hr. Witkowski¹⁾ hat bereits Gleichungen aufgestellt, die der Einwirkung der Occlusion auf den Stromverlauf Rechnung tragen sollen. Er nimmt aber reine „Ladungsströme“ an, ohne jede Neutralisation von Ionen und beschränkt sich bei der Behandlung der Aufgabe auf ein Näherungsverfahren, das innerhalb gewisser Grenzen den Stromverlauf allerdings ziemlich gut darzustellen scheint (vgl. unten p. 31).

9. In ganz entsprechender Weise, wie es für die Occlusion geschehen, können wir nun die sogenannten Convectionerscheinungen in unsere Formeln einführen. Die an den Electroden angesammelten Ionen können auch dadurch als solche beseitigt werden und für die Polarisation verloren gehen, dass gewisse, in der electrolytischen Flüssigkeit gelöste Stoffe, die an und für sich zur Stromleitung gar nicht oder nur in sehr ge-

1) A. Witkowski, Wied. Ann. 11. p. 759. 1881.

ringem Maasse beitragen, mit ihnen in chemische Wechselwirkung treten. So kann schon der von der Flüssigkeit absorbirte electrisch neutrale Luftsauerstoff auf die Polarisation von Einfluss sein, indem er die an der Kathode auftretenden H-Ionen, wie Hr. v. Helmholtz annimmt, zu Wasser oxydirt. Es findet jedesmal eine chemische Reaction statt, bei welcher nur die an den Electroden gleichzeitig befindlichen Mengen der beiden reagirenden Stoffe in Frage kommen. Dadurch, dass für die mit den Ionen in Verbindung getretenen Stoffe Ersatz aus den ferneren Schichten der Flüssigkeit durch Diffusion herbeigeschafft wird, ist die Möglichkeit fortdauernder Reaction und damit fortdauernder Einwirkung auf den Stromverlauf gegeben. Man sieht: die Reaction selbst entspricht der eigentlichen Occlusion, beide würden ohne die begleitenden Diffusionserscheinungen zum Stillstand kommen.

Es ist denn auch die mathematische Behandlung der beiden gleichwerthigen Erscheinungen eine ganz ähnliche. Für die chemische Reaction, der die Ionen verfallen, haben wir das gebräuchliche Grundgesetz in Anwendung zu bringen, wonach die Stärke der Reaction in jedem Augenblick proportional ist den vorhandenen Mengen beider reagirender Stoffe; es tritt also während dt eine Verringerung der Anzahl polarisirender Ionen ein von der Grösse:

$$\partial j_1 = -k_1 j_1 (\sigma'_1 \delta_1) dt, \quad \partial j_2 = -k_2 j_2 (\sigma'_2 \delta_2) dt,$$

wenn jetzt σ' die Dichtigkeit des einwirkenden fremden Stoffes unmittelbar an der Electrode bezeichnet und k die Constante der betreffenden Reaction; als Einheit von σ' gilt diejenige Menge, die mit Ion sich verbindet. Versteht man weiter unter ρ' die Dichtigkeit des reagirenden Stoffes in der Entfernung x von der Electrode, so wird $\sigma' = \rho'_{x=0}$ als Function der Zeit bestimmt durch die Diffusionsgleichungen:

$$(24) \quad \frac{\partial \rho'_1}{\partial t} = \kappa_1' \frac{\partial^2 \rho'_1}{\partial x_1^2} \quad \text{bez.} \quad \frac{\partial \rho'_2}{\partial t} = \kappa_2' \frac{\partial^2 \rho'_2}{\partial x_2^2}.$$

Wenn die x -Axe jedesmal so gelegt wird, dass x mit wachsendem ρ wächst, dann lauten die wesentlichen Bedingungen:

$$(25) \quad k_1 j_1 (\sigma'_1 \delta_1) = \kappa_1' \left(\frac{\partial \rho'_1}{\partial x_1} \right)_{x_1=0} \quad \text{bez.} \quad k_2 j_2 (\sigma'_2 \delta_2) = \kappa_2' \left(\frac{\partial \rho'_2}{\partial x_2} \right)_{x_2=0}$$

In vielen Fällen wird man für *beide* Ionenarten einen solchen Einfluss der Convection anzunehmen haben. Es können ja sogar unter Umständen die beiden Ionen ohne Anwesenheit eines fremden Körpers sich *gegenseitig* in der geschilderten Weise beeinflussen, indem die neutralisirten Bruchtheile beider durch die Flüssigkeit in entgegengesetzter Richtung diffundirend zur anderen Electrode gelangen.

10. Wir würden also, um Occlusion und Convection nebeneinander zu berücksichtigen, die Gleichungen (23) noch um die oben abgeleiteten Glieder zu erweitern und dem System noch zwei weitere Differentialgleichungen zuzufügen haben. An eine strenge Lösung des dann in ganz allgemeiner Form aufgestellten Problems ist bei dem heutigen Stande der Analysis wohl nicht zu denken. Wir wollen uns denn mit einer angenäherten, nur beschränkt gültigen Lösung begnügen, die uns zur Beschreibung der Vorgänge schon gute Dienste leisten wird. Nehmen wir an, es seien die Einrichtungen so getroffen, dass Occlusion und Convection, falls sie auftreten, *ohne Hinderniss und Schwächung* verlaufen und wirken können. Dazu müssten einerseits die in die Electrode übergetretenen Ionen so schnell dort fort diffundiren oder irgendwie beseitigt werden, dass es zu einer Ansammlung in der Grenzschicht nicht kommt, dass also die $\sigma = 0$ zu setzen seien; andererseits müsste die Convection in jedem Augenblick die durch Reaction mit den Ionen verschwindenden Stoffmengen gerade vollkommen ersetzen, die σ' würden dann constant sein. Letzteres ist wenigstens in *dem* oben erwähnten Falle denkbar, wo der Strom selbst an der einen Electrode den Stoff erzeugt, der auf das Ion der anderen Electrode einwirkt. Für solche Ströme gilt im besonderen die Bezeichnung „Convectionsströme“.

Die in die Differentialgleichung neu eingetretenen Glieder haben bei solcher Annahme die Form:

$$-\frac{\omega}{\delta} \cdot j \cdot dt \text{ bez. } -k \sigma' \delta \cdot j \cdot dt,$$

wir können sie also in ein Glied

$$-a j dt$$

zusammenfassen, wo a eine Constante.

Das System der Differentialgleichungen hat dann folgende Gestalt:

$$(26) \quad \begin{cases} W \cdot \frac{dq}{dt} = A - c \varepsilon \frac{j_1 + j_2}{2}, \\ \varepsilon dj_1 = (1 - \beta \varepsilon j_1) \frac{dq}{s} - \varepsilon \cdot a_1 j_1 dt, \\ \varepsilon dj_2 = (1 - \beta \varepsilon j_2) \frac{dq}{s} - \varepsilon \cdot a_2 j_2 dt. \end{cases}$$

Wir führen in die doch nur angenähert gültigen Gleichungen noch die Vereinfachung ein, dass wir a_1 und a_2 beide durch ihren Mittelwerth $a = (a_1 + a_2)/2$ ersetzen, und schreiben ferner wieder $(j_1 + j_2)/2 = j$; dann haben wir:

$$(27) \quad \begin{cases} W \cdot \frac{dq}{dt} = A - c \varepsilon j, \\ \varepsilon dj = (1 - \beta \varepsilon j) \frac{dq}{s} - a \varepsilon j dt. \end{cases}$$

Die Integration dieser Gleichungen lässt sich nun ganz in derselben Weise durchführen, wie in dem oben behandelten besonderen Falle $a = 0$; man hat:

$$\frac{\varepsilon dj}{(1 - \beta \varepsilon j)(A - c \varepsilon j) - \varepsilon a W s j} = \frac{dt}{W s},$$

Zerlegung in Partialbrüche liefert:

$$d^* \log \frac{1 - \eta \varepsilon j}{A - \zeta \varepsilon j} = \frac{\zeta - \eta A}{W s} dt,$$

wobei sich die Constanten ζ und η bestimmen aus den Gleichungen:

$$(28) \quad \begin{cases} \zeta + \eta A = \beta A + c + a W s, \\ \zeta \eta = \beta c; \end{cases}$$

setzt man noch zur Abkürzung

$$\frac{\zeta - \eta A}{W s} = -y,$$

so folgt:

$$\varepsilon j = \frac{1 - A C e^{-y t}}{\eta - \zeta C e^{-y t}};$$

die Integrationsconstante C ergibt sich zu $1/A$, da für $t = 0$ $j = 0$ sein soll (in dem oben erläuterten Sinne); danach wird

$$\varepsilon j = A \frac{1 - e^{-y t}}{A \eta - \zeta e^{-y t}}.$$

Gleichung (27a) liefert nun die Stromstärke als Function der Zeit:

$$(29) \quad W \frac{dq}{dt} = A \cdot \frac{A\eta - c - (\zeta - c)e^{-yt}}{A\eta - \zeta \cdot e^{-yt}}.$$

Die analytischen Ausdrücke für j und dq/dt sind hier also den früher gefundenen durchaus ähnlich, sie gehen auch in jene über, wenn man $a = 0$ einführt.

Wichtig für die physikalische Deutung dieser Functionen ist vor allem die Constante

$$(30) \quad y = \frac{\eta A - \zeta}{W_s};$$

aus den Bestimmungsgleichungen (28) für ζ und η findet man

$$y = \frac{\sqrt{(A\beta + c + aWs)^2 - 4A\beta c}}{Ws},$$

oder also, wenn man wieder $c/\beta = P$ und überdies $(aWs/\beta) = \Omega$ einsetzt:

$$y = \frac{\sqrt{(A + P + \Omega)^2 - 4AP}}{Ws} \cdot \beta;$$

als Vorzeichen dieser Wurzel ist das positive zu wählen, denn wenn a verschwindet, muss sich, wie wir wissen,

$$y = x = + \frac{A - P}{Ws} \beta$$

ergeben.

In dem früheren einfachen Falle konnte der Exponentialfactor (x) sowohl positiv als negativ sein, je nachdem $A \geq P$: diese Möglichkeit fällt jetzt fort, y ist eine wesentlich positive Grösse für alle beliebigen Werthe der erregenden electromotorischen Kraft A .

11. Was nun zunächst die Veränderlichkeit der Polarisation in der ersten Zeit nach Stromschluss betrifft, so möchte ich folgendes bemerken: Hr. Bouty¹⁾ hat hierfür kürzlich eine empirische Formel aufgestellt; diese ergibt sich aus obigen Entwicklungen als in erster Annäherung gültig. Führt man nämlich statt e^{-yt} ein $1 - yt$, so findet man:

$$sj = A \frac{yt}{A\eta - \zeta + \zeta yt},$$

1) E. Bouty, Compt. rend. 116. p. 628. 691. 732 und 117. p. 222. 1893.

oder, wenn man (30) beachtet:

$$(31) \quad p = c \epsilon j = \frac{c}{s} \cdot \frac{A}{W} \cdot \frac{t}{1 + \frac{\zeta}{Ws} \cdot t};$$

das ist aber die Bouty'sche Formel in unseren Bezeichnungen. Der Factor ζ/Ws (die „Geschwindigkeit der freiwilligen Depolarisation“ nach Bouty) hängt von den Constanten des Voltameters und der Versuchsanordnung ab.

Gleichung (29) lehrt uns ferner, da y unter allen Umständen positiv, dass die Stromstärke $i = dq/dt$ von dem Anfangswerth A/W aus stetig abnimmt, bis sie, streng genommen für unendlich grosses t , praktisch schon nach sehr kurzer Zeit den Grenzwert

$$(32) \quad J = \frac{A - \frac{c}{\eta}}{W}$$

erreicht, wo dann die Ionenmenge j den Grenzwert

$$(33) \quad \gamma = \frac{1}{s \eta}$$

aufweist. Es tritt also, wenn eine Polarisation in der Art verläuft, wie wir es oben vorausgesetzt, schon sehr bald ein stationärer Zustand ein, der der Beobachtung besonders gut zugänglich ist. In Wirklichkeit wird der zeitliche Ablauf des Stromes freilich vielfach ein wesentlich anderer sein, als ihn Gleichung (29) darstellt. Die Occlusion wird fast stets ihrem Fortschreiten selbst Hindernisse schaffen in der Ansammlung der occludirten Ionen, und ihr Einfluss auf den Stromverlauf wird immer mehr abnehmen. Andererseits wird in dem Falle, wo die beiden Electroden sich gegenseitig „depolarisiren“, einige Zeit vergehen, bis sich wirklich Verhältnisse herausgebildet haben, wie wir sie bei unseren Rechnungen oben angenommen (bis die Diffusion von der einen Electrode her mit dem Fortgang der Reaction an der anderen gleichen Schritt halten kann). Auf diese zeitliche Veränderlichkeit der Erscheinung werden wir noch zurückkommen, für jetzt begnügen wir uns mit der Ueberzeugung, dass wir überall da, wo ein stationärer Zustand der Polarisation vorliegt, auf diesen die oben abgeleiteten Gesetze für die Stromstärke J und die Ionenanhäufung γ anwenden können.

Wir sehen aus diesen: der primären electromotorischen Kraft A wirkt im stationären Strome eine Polarisationskraft $\varphi = c/\eta$ entgegen, die mit A selbst, überdies aber auch noch mit dem Widerstande W und der Electrodenfläche s veränderlich ist. Um die Abhängigkeit der Polarisation φ von diesen Grössen zu ermitteln, berechnen wir η aus den Bestimmungsgleichungen (28); wir finden:

$$(34) \quad \frac{\eta}{\beta} = \frac{A + P + \Omega + \sqrt{(A + P + \Omega)^2 - 4AP}}{2A},$$

danach lässt sich φ als Function von A, W, s darstellen durch die Gleichung:

$$\varphi \cdot \sqrt{(A + P + \Omega)^2 - 4AP} = 2AP - \varphi(A + P + \Omega),$$

oder auch:

$$\varphi^2 - (A + P + \Omega)\varphi + AP = 0.$$

Es ist indess richtiger, als unabhängige Variable die erzeugte Stromstärke

$$J = \frac{A - \varphi}{W}$$

einzuführen. Man kann die letzte Gleichung leicht auf die Form bringen:

$$-\varphi J + PJ - \varphi \frac{\Omega}{W} = 0,$$

also

$$(35a) \quad \varphi = P \cdot \frac{J}{J + \frac{as}{\beta}},$$

oder auch

$$(35b) \quad \varphi = P \cdot \frac{\frac{J}{s}}{\frac{J}{s} + \frac{a}{\beta}}.$$

Die Beziehung zwischen der Polarisation φ und der Stromstärke J bez. Stromdichte J/s erhält also eine sehr einfache Gestalt. Sie wird, wie man leicht erkennt, geometrisch dargestellt durch eine *gleichseitige Hyperbel*, die den positiven Theil der Graden $\varphi = P$ und den negativen der Graden $J = -as/\beta$ zu Asymptotenachsen hat. Für kleine Werthe von J wächst φ von 0 ab sehr schnell an, später immer weniger und nähert sich schliesslich dem Maximum P , das praktisch schon für

endliche Werthe von J erreicht wird. Fig. 1 zeigt einige solche Hyperbeln, die sich durch verschiedene Werthe des Parameters a/β unterscheiden. Je kleiner derselbe, um so mehr schmiegt sich die Curve den Graden $J=0$ und $\varphi=P$ an, um für $a=0$ mit diesen zusammenzufallen. Wir haben dann den früher behandelten Fall, wo die Polarisation für $J=0$ alle möglichen Werthe zwischen 0 und P haben konnte, dann für alle möglichen endlichen J den constanten Werth P .

12. Sehen wir zu, wie die Erfahrungsthsachen mit diesen Folgerungen unserer Theorie stimmen. Hr. Crova¹⁾ hat die Beziehung zwischen φ und J experimentell zu ermitteln gesucht. Er schliesst aus seinen eigenen Versuchs-

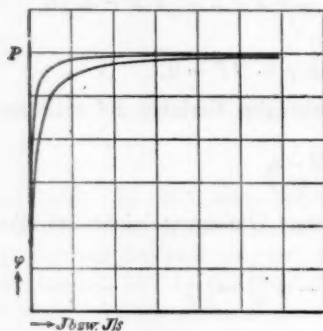


Fig. 1.

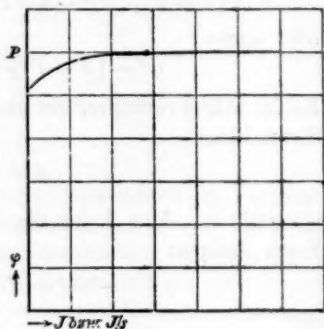


Fig. 2.

reihen und einer solchen von Poggendorff²⁾, dass man die Form anzunehmen habe:

$$\varphi = \varphi_0 + m(1 - e^{-nJ}),$$

wo φ_0 , m , n Constanten des Versuches sind. Danach wäre die Polarisation φ der electromotorischen Kraft A gleich, solange diese $< \varphi_0$; ist dieser Schwellenwerth erreicht, so wächst φ mit steigendem J von φ_0 bis zu einem Maximum $\varphi_0 + m$; Fig. 2 zeigt die entsprechende Curve. Es ist klar, dass man leicht zu einer solchen Ansicht kommen kann, wie sie von Crova formulirt und vielfach angenommen ist. Je unempfindlicher das benutzte Galvanometer, um so eher wird man den ersten,

1) A. Crova, Ann. chim. et phys. (3) 68. p. 413. 1863.

2) J. C. Poggendorff, Pogg. Ann. 67. p. 531. 1846.

steilen Theil unserer Hyperbel mit der Ordinatenaxe zusammenfallend annehmen und dann allerdings den Rest der Curve durch eine Exponentialfunction ziemlich gut darstellen können. Da es aber bisher gerade in dem von Crova untersuchten Falle: verdünnte Schwefelsäure zwischen Platinelectroden, selbst bei Anwendung sehr kleiner electromotorischer Kräfte A nicht gelungen ist, den „Ladungsstrom“ des Voltameters vollständig zum Verschwinden zu bringen¹⁾, so werden wir Crova's Auffassung als irrig und seine Resultate als eine gute Bestätigung unserer abweichenden Formel ansehen dürfen. Es ist dies ein Fall, wo auf rein empirischem Wege ein geradezu *falsches* Gesetz für eine Erscheinung abgeleitet wurde, und das ist hier nicht ganz ohne Bedeutung, weil man auf Grund desselben glaubte, von einem kritischen Werth der electromotorischen Kraft als identisch mit einem „Anfangswerth“ der Polarisation, einem „Zersetzungswerth“ sprechen zu dürfen. Ein solcher existirt, wie wir sehen, nicht, solange Occlusion oder eine gleichwerthige Erscheinung beim Polarisationsvorgange mitspielt, und das wird vielleicht stets der Fall sein. Sollten sich aber einmal derartige Einflüsse sehr vollkommen ausschliessen lassen, so wird der zu beobachtende kritische Werth von A , wie wir früher fanden, identisch sein mit dem Polarisationsmaximum, und es tritt dann die Frage auf, was uns diese Grösse $P = c/\beta$ lehrt.

Von diesem Gesichtspunkte aus muss man Hrn. Le Blanc's Versuche²⁾ beurtheilen. Sie betreffen, wie erwähnt, die Aenderung der resultirenden Stromstärke J mit der electromotorischen Kraft A . Die Beziehung zwischen beiden können wir aus unseren Formeln leicht ableiten; es ist ja:

$$\varphi = \frac{PJ}{J + \frac{as}{\beta}} = A - JW,$$

also

$$(36) \quad J^2 W - JA + J(P + \Omega) - A \frac{as}{\beta} = 0,$$

wir erhalten, wenn A zur Abscisse, J zur Ordinate genommen wird, eine *Hyperbel*, die für sehr kleines A sich an die Abscissen-

1) Vgl. H. v. Helmholtz, Berl. Akad. Ber. p. 647. 1888.

2) M. Le Blanc, l. c.

axe, für grosses A an die Grade $J = (A - P)/W$ anschmiegt (Fig. 3). Hr. Le Blanc hat denjenigen Punkt zu ermitteln gesucht, „von dem aus eine deutliche Zunahme der Stromstärke bei Steigerung der electromotorischen Kraft erkennbar ist“. Die Lage dieses Punktes (etwa Z) wird nun insbesondere ganz vom Werth des Parameters as/β abhängen, und nur falls dieser sehr klein, wird Z mit dem Punkt P nahe zusammenfallen. Hr. Le Blanc gibt ja selbst an, dass es für manche Stoffe schwierig sei, den „Zersetzungspunkt“ aufzufinden (vgl. die Verhältnisse beim buttersauren Natrium), dass dieser auch bei Wiederholung der Versuche öfters etwas schwanke. Jedenfalls musste man, um die Bedeutung des

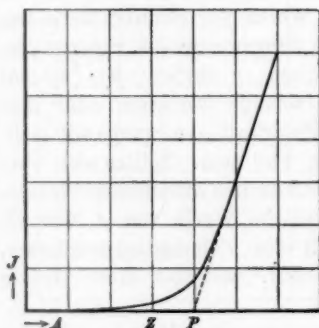


Fig. 3.

Werthes Z beurtheilen zu können, die Beziehung zwischen J und A in seiner Umgebung genauer ermitteln und in Rechnung ziehen. Denn an und für sich lehrt uns Z nichts wesentliches, da sein Werth von den beiden Constanten c/β , a/β , dem Widerstand W und der Electrodenfläche s abhängt. Metallsalze, aus deren Lösungen die Metalle auf die Electroden niedergeschlagen werden, las-

sen nach Hrn. Le Blanc den „Zersetzungspunkt“ mit ausserordentlicher Schärfe erkennen, offenbar, weil hier Occlusion und dergleichen nur in verschwindendem Maasse stattfindet. Man wird den gefundenen Werth als das Maximum P der Polarisation ansehen dürfen, der Vorgang nähert sich sehr dem eingangs besprochenen idealen Grenzfall.

13. Wir wollen noch die Frage aufwerfen, welche Gesetze denn für die Stromstärke J gelten, falls wir eine im Vergleich zum Maximum P sehr kleine electromotorische Kraft A anwenden. Um die Antwort zu finden, vernachlässigen wir in erster Annäherung A gegen P ; es ergibt sich nach Gleichung (34):

$$\frac{\eta}{\beta} = \frac{P + \Omega}{A},$$

mithin die Polarisation in diesem Grenzfall:

$$\varphi_0 = \frac{e}{\eta} = \frac{P}{P + \Omega} \cdot A,$$

oder, wiederum angenähert, wenn Ω nicht sehr gross:

$$\varphi_0 = A \left(1 - \frac{\Omega}{P}\right);$$

daraus folgt nun die Stromstärke für sehr kleine Werthe von A :

$$(37) \quad J_0 = \frac{A \Omega}{W P} = \frac{A a s}{c},$$

also unabhängig vom Widerstande W , proportional der electromotorischen Kraft A und der Electrodenfläche s .

Die erste Folgerung wenigstens finden wir in Versuchen von Hrn. v. Helmholtz¹⁾ bestätigt, der ein Platin-Schwefelsäurevoltameter durch ein Daniell'sches Element polarisirte. Nachdem der „condensatorische“ Strom verlaufen, „machten Einschaltungen von 20 bis 60 Meilen Telegraphendraht zwar für einige Sekunden die Nadel des Multiplicators zurückweichen, liessen sie dann aber bald wieder auf ihre frühere Ablenkung kommen. Der Widerstand des übrigen Stromkreises betrug dabei etwa nur 2 Meilen desselben Drahtes.“

Eingehender hat Hr. Bartoli²⁾ sich mit dem bei Anwenden sehr kleiner electromotorischer Kräfte „restirenden“ Strom befasst. Er wandte Platin- und Goldplatten als Electroden in verdünnter Schwefelsäure und in Lösungen von Alkalisalzen an. Der stationäre Werth J_0 der Stromstärke wurde um so schneller erreicht, je kleiner der Widerstand des Kreises, wie das auch unsere Formel ergiebt, die W im Nenner des Exponentialfactors y aufweist. Es zeigte sich nun in der That J_0 unabhängig vom Gesamtwiderstand, solange dieser eine bestimmte Grenze nicht überschritt (wird W zu gross, dann kann man nicht mehr Ω/P gegen 1 sehr klein setzen, wie das in unserer Ableitung geschehen). So änderte sich z. B. einmal bei allmählicher Einschaltung von 60 000 Siem. die Stromstärke nur um weniger als 1 Proc. Weitere Versuche mit Electroden verschiedener Oberfläche ergaben auch die Proportionalität zwi-

1) H. v. Helmholtz, Wiss. Abh. 1. p. 833.

2) A. Bartoli, Nuov. Cim. (3) 11. p. 193. 1882; Beibl. 6. p. 804.

schen J_0 und s . Beide Gesetze gelten um so genauer, je kleiner die erregende electromotorische Kraft, wie zu erwarten war. Bei Steigerung der letzteren schien J_0 proportional ihrer 4. Potenz zuzunehmen. Diese Beziehung zwischen J und A , von Bartoli selbst mit Vorbehalt aufgestellt, wird wohl besser durch unsere Gleichung (36) ausgedrückt; Proportionalität mit der 1. Potenz kann nur bei sehr kleinen Werthen von A bestehen.

Endlich fand sich auch der restirende Strom sehr stark abhängig von der *Temperatur* des Voltameters. So stieg er in einem Falle, wo ein Patin-Schwefelsäurevoltameter durch eine electromotorische Kraft gleich $\frac{1}{3}$ Dan. polarisirt war, bei einer Temperaturerhöhung von $+5^\circ$ auf $+90^\circ$ auf das 30fache seines anfänglichen Werthes. In unserem Ausdruck für J_0 kommt der Factor a vor, der in dem erwähnten Falle wohl hauptsächlich durch die „Convection“ bedingt ist; er enthält also die Constante k , hier die Reaktionsgeschwindigkeit der Wasserbildung. Deren starke Aenderung mit der Temperatur spricht sich offenbar in der Bartoli'schen Beobachtung aus. (Vielleicht bietet die Behandlung der restirenden Polarisationsströme, falls man geregelte Verhältnisse herstellen kann, ein Mittel, die Gesetzmässigkeiten einiger Reactionsconstanten zu untersuchen.) Wir sehen also, dass die Ergebnisse der Bartoli'schen Versuche mit den Forderungen unserer Theorie in recht guter Uebereinstimmung sind.

14. So einfach verhältnissmässig die Gesetze der stationären Polarisationsströme sich aus unseren Grundgleichungen ableiten lassen, so viel schwieriger gestaltet sich die Aufgabe, falls wir auf die *Veränderlichkeit* der Occlusion und Convection Rücksicht nehmen wollen. Die Haupt- und Nebenerscheinungen sind hier eben so eng miteinander verknüpft, dass das Gesamtbild ihres Verlaufes ein sehr complicirtes wird. Ich erwähnte bereits die Rechnungen von Hrn. Witkowski¹⁾, der den Einfluss der fortschreitenden Diffusion auf den Stromverlauf darzustellen suchte. Selbst, wenn man einmal von der theilweisen Neutralisation absieht ($\beta = 0$ setzt), so sind doch die dort entwickelten Formeln nicht streng richtig, da die

1) A. Witkowski, Wied. Ann. 11. p. 759. 1881.

Diffusion und die eigentliche Polarisation in gewissem Sinne als unabhängig voneinander behandelt werden. Es liegt eben ein mathematisches Problem von eigenartiger Schwierigkeit vor: die Integration der Diffusionsgleichung unter den oben aufgestellten Grenzbedingungen, in denen Grössen vorkommen, die ihrerseits wieder durch das Integral der Gleichung beeinflusst werden. Witkowski gelangt, indem er die Electroden als „unendlich dick“ annimmt, zu einer Formel, die man wenigstens für grössere Werthe der Zeit t wohl als angenähert gültig ansehen kann; es verläuft nach ihm der Polarisationsstrom gemäss dem Gesetze

$$i = \frac{f}{\sqrt{t}} + g,$$

wo f und g Constanten. Von ersterer ergibt sich, dass sie wie unser $J_0 (= g)$ vom Widerstand unabhängig und der Electrodenfläche proportional ist. Ueber den Einfluss der electromotorischen Kräfte lässt sich nichts aussagen. Die Beobachtungen, die Witkowski an Platin-Schwefelsäurevolta-metern mit Electroden von ziemlich grosser Oberfläche (bis zu 440 qcm) angestellt hat, bestätigen die obigen Gesetze in genügender Weise.

Von Hrn. v. Helmholtz¹⁾ ist gelegentlich ein Versuch mitgetheilt worden, bei dem die Absicht verfolgt wurde, den durch eine kleine electromotorische Kraft erzeugten Polarisationsstrom möglichst rasch zu einem stationären, verhältnissmässig hohen Endwerthe zu führen. Die platinirten Flächen zweier Glasplatten wurden nur durch sehr dünne Glasscheibchen voneinander getrennt, mit Stromzuleitungen versehen und nun in den capillaren Zwischenraum verdünnte Schwefelsäure eingeführt. Bei solcher Anordnung eines Voltameters ist die Occlusion wegen der geringen Tiefe der Electroden sehr schnell beendet, diese beeinflussen sich nun aber bei ihrer kleinen Entfernung voneinander in der früher geschilderten Weise sehr stark. Die Wanderung der depolarisirenden Stoffe (einerseits Sauerstoff, andererseits Wasserstoff) gestaltet sich bald zu einem stationären lebhaften Diffusionsstrom, die polarisirenden Schichten werden durch die Reactionen fortdauernd sehr ge-

1) H. v. Helmholtz, Proc. Edinb. R. Soc. 12. p. 596. 1884.

lichtet, und ein verhältnissmässig kräftiger stationärer Convectionsstrom ist die Folge davon. Die mathematische Behandlung müsste die Abhängigkeit desselben von der Dicke der Flüssigkeitsschicht ergeben.

15. Wenden wir uns nun, nachdem wir den Stromverlauf unter dem Einfluss von Occlusion und Convection besprochen haben, zur *chemischen* Seite der Frage. Da wir sahen, dass unter den gedachten Umständen selbst durch die schwächsten electromotorischen Kräfte ein dauernder Strom unterhalten werden kann, so werden wir, unserer Grundanschauung gemäss, auch auf alle Fälle eine dauernde „Zersetzung“ des Electrolyten zu erwarten haben. Es fragt sich nur, ob die Producte derselben wirklich *sichtbar* werden. Betrachten wir den Fall näher, der hier besonders in Frage kommt, wo als Ionen die für gewöhnlich gasförmigen Elemente H, O, Cl u. a. auftreten. Von den Electroden aus werden diese sich durch die Lösung diffundirend verbreiten, und es kommt darauf an, ob irgendwo ihre Ansammlung soweit sich steigert, dass das unter den gegebenen Verhältnissen bestehende Maximum der Löslichkeit erreicht wird. Wir haben oben bereits der Möglichkeit gedacht, dass der neutralisirte Wasserstoff bis zur Anode gelangt, umgekehrt der neutralisirte Sauerstoff bis zur Kathode, dann beide sich mit den vorgefundenen Ionen verbinden, und so eine Wasserbildung erzielt wird, aber keine Gasentwicklung.

Nun kann man aber letztere sehr befördern, wenn man dafür sorgt, dass das an der Electrode neutralisirte Gas von dort nur schwierig sich entfernen kann. Das hat Hr. Arons¹⁾ dadurch erreicht, dass er auf die Electrode — die hier aus einer äusserst dünnen, durchsichtigen Schicht Platin auf einer Glasplatte bestand — unter Schwefelsäure eine schwachgekrümmte Glaslinse fest aufpresste. Dann findet die Neutralisation in sehr beengtem Raume statt, und in der That beobachtete Arons einmal schon bei Anwendung einer electromotorischen Kraft = 0,3 Meidinger (0,3 Volt) ein Auftreten von Gasbläschen, wenn die so hergerichtete Electrode Anode war; ein andermal trat bei 0,57 Meidinger schon eine recht

1) L. Arons, Wied. Ann. 41. p. 473. 1890.

deutliche O-Entwicklung ein. Als zweite Electrode diene bei diesen Versuchen ein platinirtes Platinblech von wesentlich grösserer Oberfläche. Wurde statt dessen eine der anderen Electrode ganz gleiche verwendet, so war eine Gasentwicklung auch für $A = 1$ Meid. nicht zu beobachten. Das ist nach unseren Anschauungen vollkommen verständlich. Denn dadurch werden beide Einflüsse, die für $A < P$ einen dauernden Strom erzeugen können, auf ein äusserst geringes Maass herabgesetzt: die Electroden sättigen sich beide wegen ihrer verschwindenden Dicke sehr schnell, die Occlusion kommt zum Stillstand; ferner verzehrt sich der in der dünnen Schicht Flüssigkeit an der Kathode absorbirte Luftsauerstoff bald, auch die gegenseitige Beeinflussung der Electroden ist durch die Versuchsanordnung sehr erschwert; der Vorgang nähert sich also einer occlusions- und convectionsfreien Polarisation, bei einer electromotorischen Kraft unterhalb des Maximums sinkt der Strom schnell auf Null ab, es findet eine Neutralisation nur in minimaler Menge statt. Ist dagegen die zweite Electrode ein gewöhnliches ungeschütztes Platinblech — noch dazu platinirt und von grösserer Oberfläche, sodass die Polarisation selbst herabgesetzt wird — so kann hier die Occlusion viel länger fortschreiten, auch Convectionseinflüsse können sich viel stärker geltend machen, es bleibt ein dauernder Strom bestehen, dessen Neutralisationsproduct an der ersten Electrode nun für eine Ausscheidung günstige Verhältnisse vorfindet. Dass eine Entwicklung von H unter den gleichen Bedingungen wie die von O nicht beobachtet werden konnte, erklärt sich wohl daraus, dass die massive Electrode H viel lebhafter occludirt als O, mithin als Kathode einen stärkeren Strom zu Stande kommen lässt, denn als Anode.

Sind unsere Anschauungen richtig, so müssen Arons'sche Electroden mehr als die sonst üblichen geeignet sein, den wahren „Zersetzungswerth“, d. h. das Maximum der Polarisation erkennen zu lassen, wenn man sie gleichzeitig als Anode und Kathode der Zersetzungszone benutzt.

16. Die Menge neutralisirter Ionen in ihrem Verhältniss zur Strommenge finden wir vermittels der aus unserer Grundannahme folgenden Gleichung:

$$s dr = \beta j . dq;$$

wir wissen, dass j in kurzer Zeit den stationären Grenzwert γ mit grosser Annäherung erreicht; bei nicht allzu kleiner Stromdauer können wir also j durch die Constante $\gamma = 1 / \epsilon \eta$ ersetzen und erhalten dann durch Integration

$$\frac{sr}{q} = \frac{\beta}{\epsilon \eta}.$$

Die von der Einheit der durch den Stromkreis gegangenen Electricitätsmenge an den Electroden *neutralisirte* (und bei verschwindender Löslichkeit auch *ausgeschiedene*) Ionenmenge hat also den Werth

$$f = \frac{\beta}{\epsilon \eta},$$

sie ist mit den Versuchsbedingungen (η) veränderlich, im idealen Grenzfall

$$f_0 = \frac{1}{\epsilon}$$

gleich dem „electrochemischen Aequivalent“, wenn man hierunter die mit der Electricitätsmenge 1 *wandernde* Ionenmenge versteht. Man könnte zur strengeren Unterscheidung f vielleicht als den „Zersetzungsfactor“ bezeichnen. Wir haben:

$$\frac{f}{f_0} = \frac{\beta}{\eta} = \frac{\frac{c}{\eta}}{\frac{c}{\beta}} = \frac{q}{P},$$

d. h. der Zersetzungsfactor steht zu seinem Grenzwert, dem electrochemischen Aequivalent, im selben Verhältniss, wie der den gegebenen Umständen entsprechende Werth der Polarisation zu deren Maximalwerth.

Benutzt man Gleichung (35 b), so ergibt sich der Zersetzungsfactor in seiner Abhängigkeit von der Stromdichte J/s :

$$f = f_0 \frac{\frac{J}{s}}{\frac{J}{s} + \frac{a}{\beta}},$$

er wächst also mit wachsender Stromdichte, indessen bei einigermaassen grossem Werth derselben, wie er bei electrolytischen Versuchen gebraucht wird, nur sehr wenig, im selben Maass wie die Polarisation.

Man braucht die Annahme einer solchen Veränderlichkeit der electrolytischen Wirkung nicht zu scheuen; sie ist eine

nothwendige Folge unserer Grundanschauung, wonach die Stärke der Neutralisation von der Stärke der Ionenansammlung abhängt. Die in der Praxis der chemischen Strommessung vorkommenden Verhältnisse sind ja auch solche, unter denen eine Abweichung von den im idealen Grenzfall gültigen Gesetzen sich kaum merklich machen wird.

17. Zu den chemischen Wirkungen des Stromes können wir auch die Occlusion von Gasen durch die Electroden rechnen. Sehen wir zu, welche Gesetze für diese sich aus unseren Anschauungen ergeben.

Die Menge des von einer Electrode bestimmten Volumens v occludirten Gases wächst bei längerer Fortdauer des Stromes bis zu einem Grenzwert, der nach unserer Annahme über das Grundgesetz der Occlusion dann erreicht ist, wenn die Dichtigkeit ρ des occludirten Gases in jedem Punkte der Electrode gleich der Dichtigkeit der Ionenansammlung vor der Electrode ist. Diese letztere haben wir bekanntlich im stationären Endstrom gleich γ/δ zu setzen, wenn wir uns mit dem Mittelwerth der im allgemeinen für beide Electroden verschiedenen Grösse begnügen, und so ergibt sich denn für die Menge Gas, die das Volumen v der Electrode in maximo occludiren kann, der Ausdruck $M = v(\gamma/\delta)$. Da γ proportional der Polarisation ϕ ist, so finden wir also:

Es wächst für gegebene Verhältnisse des Voltameters die occludirte Gasmenge mit wachsender Stromstärke nach demselben Gesetz, wie die Polarisation bis zu einem Maximum.

Zur Prüfung dieser Folgerung an der Erfahrung bieten sich die schon erwähnten Versuche von Hrn. Thoma¹⁾ dar, die sich auf die Occlusion von H, namentlich durch Palladium und Eisen, beziehen. Hier wurde die aufgenommene Gasmenge bei Pd durch die Verlängerung der drahtförmigen Electrode, bei Fe dadurch gemessen, dass man sie nach Stromöffnung unter Wasser wieder austreten liess und nun ihr Volumen bestimmte. Für Pd bot sich so die Möglichkeit, die Erreichung des Grenzzustandes wirklich zu constatiren. Die Curve nun, durch die Thoma hier den von ihm sogenannten „Uebersättigungsgrad“ in seiner Abhängigkeit von der Stromstärke

1) M. Thoma, Zeitschr. f. physik. Chem. 3. p. 69. 1889.

darstellt (l. c. Taf. VII, Fig. 1 und 2), hat in der That ganz die Form der von uns in Fig. 1 gezeichneten Hyperbeln. Das gleiche gilt für eine Legirung von Pd und Pt (Taf. VIII, Fig. 7). Bei den Versuchen mit Eisenelectroden, in Gestalt von Drahtbündeln, mit wesentlich kürzerer Dauer wurde wohl die vollkommene „Uebersättigung“ noch lange nicht erreicht, denn die aufgenommenen Mengen zeigen sich proportional der Oberfläche. Trotzdem erscheint ihre Abhängigkeit von der Stromstärke durch dasselbe Gesetz gegeben, wie oben bei der beendeten Occlusion durch Pd. Wir haben ja anzunehmen, dass auch das noch von t und x abhängige ρ , mithin auch $f\rho, dx$, den Factor γ/δ enthält und also von J in der gleichen Weise abhängt, wie sein stationärer Grenzwert. — Für die Pd-Kathode wurde auch die Polarisation selbst gemessen und zwar gegen Zn in concentrirter ZnSO_4 -Lösung. Sie änderte sich mit der Stromstärke nach demselben Gesetze wie die H-Aufnahme.

Hrn. Thoma's Versuche zeigen weiter, dass ein Pd-Stück nach beendeter Occlusion nicht *allen* aufgenommenen H wieder von selbst abgiebt; es behält einen grossen Theil bei, wenn man es unter luftfreiem Wasser, Alkohol oder Aether aufbewahrt. Diese dauernd occludirte Menge wird wohl durch die Ionensammlung bedingt, die der *natürlichen* Potentialdifferenz des Metalles gegen Wasser etc. entspricht. Wir haben oben die Grössen j von diesem letzteren Zustande ab als Ausgangspunkt gezählt. Das gleiche muss dann natürlich für die σ und überhaupt die ρ geschehen. So spricht denn Thoma auch von einem „Uebersättigungsgrad“ im Gegensatz zur „Sättigung“, die erst erreicht sein muss, bevor die obigen Gesetze gelten. Wir müssen dann eigentlich auch, um unsere Formeln anwenden zu können, voraussetzen, dass die Electroden bereits in „gesättigtem“ Zustande gegeben sind.

Inwiefern die Occlusionsverhältnisse für die Zustände unterhalb und oberhalb der Sättigungsgrenze sich unterscheiden (Legirung, Palladiumhydrür), darüber können wohl erst weitere Untersuchungen genauere Auskunft geben.

18. Wir wiesen oben bereits darauf hin, dass die durchgeführten Rechnungen nur den Mittelwerth der beiden Theilpolarisationen betreffen. Der Einfachheit wegen hatten wir

uns auf diesen beschränkt. Solange der Einfluss der Occlusion und Convection nicht merklich ist, verhalten sich die beiden Electroden, wie wir oben auf Grund der Bartoli'schen und Blondlot'schen Messungen angenommen haben, thatsächlich auch in quantitativer Beziehung vollkommen gleich. Jene Nebenvorgänge aber werden im allgemeinen diese Gleichheit vernichten und wesentliche Verschiedenheiten zwischen den beiden Electroden eintreten lassen.

Es wurde bereits der Methoden gedacht, nach denen man die Theilpolarisationen, jede gesondert, der Messung zu unterwerfen gesucht hat. In dieser Beziehung sind besonders die zahlreichen Versuche von Hrn. Fromme¹⁾ über den Verlauf der Polarisation an Electroden von Pt, Pd, Au in verdünnter Schwefelsäure zu nennen. Ihre Ergebnisse lassen sich mit unseren Anschauungen wohl vollkommen in Einklang bringen, wenn man die verschiedene Occlusions- und Diffusionsgeschwindigkeit der beiden Ionenarten in Betracht zieht. Zu einer umfassenden Darstellung der ziemlich verwickelten und veränderlichen Erscheinungen müsste man freilich die Behandlung des früher aufgestellten Gleichungssystems wesentlicher strenger und allgemeiner durchführen, als es oben geschehen. Eine angenäherte, dafür übersichtliche Ableitung, wie ich sie zu geben versuchte, ist aber wohl besser geeignet, die Hauptpunkte der Frage klarzulegen und zum Vergleich mit der Erfahrung zu bringen.

19. Ich möchte nun noch auf eine Gruppe von Erscheinungen eingehen, die bisher keine Berücksichtigung gefunden hat, nämlich die *Entladungen* polarisirter Voltameter. Wir können deren Gesetze mit derselben Annäherung wie die der Ladung aus unseren Grundanschauungen ohne weiteres herleiten.

Von dem Augenblicke ab, wo das Voltameter von der polarisirenden Kette gelöst und nun, durch einen Widerstand geschlossen, sich selbst überlassen wird, wirkt stromerregend nur seine eigene electromotorische Kraft p . Wir haben für den Depolarisationsstrom:

$$(40) \quad W \cdot \frac{dq}{dt} = p = \frac{e}{2} \epsilon (j_1 + j_2);$$

1) C. Fromme, Wied. Ann. **29**. p. 497. 1886 und **30**. p. 77. 320. 503. 1887.

nun treten an die Kathode Anionen, an die Anode Kationen heran und lassen die polarisirenden Ionenmengen, indem sie sich mit ihnen vereinigen, verschwinden. Natürlich müssen wir annehmen, dass auch hier wieder nur ein Theil der herantretenden Ionen auf die Polarisation einwirkt, der andere wird sofort neutralisirt und kommt höchstens secundär, gemäss der Geschwindigkeit seiner rein chemischen Reaction mit den Ionen, in Betracht; wir haben jetzt:

$$(41) \quad \begin{cases} \epsilon dj_1 = -(1 - \beta \epsilon j_1) \frac{dq}{s} - \epsilon \omega_1 \left(\frac{j_1}{\delta_1} - \sigma_1 \right) dt, \\ \epsilon dj_2 = -(1 - \beta \epsilon j_2) \frac{dq}{s} - \epsilon \omega_2 \left(\frac{j_2}{\delta_2} - \sigma_2 \right) dt, \end{cases}$$

wenn wir die Occlusion gleich mit in Rechnung ziehen; sobald $j/\delta < \sigma$ geworden, bewirkt also das Zurückströmen des occludirten Gases an die Oberfläche eine Verstärkung der Polarisation; das Abklingen derselben wird verzögert.

Die Integration der aufgestellten Gleichungen, zu denen im allgemeinsten Falle noch die Glieder für die Convectionseinflüsse und die Fick'sche Gleichung für die Diffusionsvorgänge zu treten hätten, lässt sich ganz in derselben Weise durchführen, wie oben im Falle der Ladung der Zelle. Wir können wieder für den Mittelwerth j der Polarisationen beider Electroden Gleichungen aufstellen, und zwar lauten diese:

$$(42) \quad \begin{cases} W \cdot \frac{dq}{dt} = c \epsilon j \\ \epsilon dj = -(1 - \beta \epsilon j) \frac{dq}{s} - (\epsilon a j - b) dt, \end{cases}$$

wenn wir annehmen, dass die aus dem Innern der Electroden zurückströmenden Gase die Dichtigkeit in der Grenzschicht (σ) während der Dauer unserer Versuche constant zu erhalten vermögen, und demgemäss die Constante b einführen.

Als Integral des Systems ergibt sich

$$(43) \quad \epsilon j = \frac{B - C e^{-\lambda t}}{\lambda - \mu C e^{-\lambda t}},$$

wobei die Constanten B, λ, μ, x sich aus den Gleichungen bestimmen:

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} B = b W s, \quad B \mu + \lambda = c + a W s, \quad \lambda \mu = c \beta, \\ x = \frac{\lambda - B \mu}{W s} > 0, \end{array} \right.$$

während die Integrationsconstante C durch den Werth j_0 von j im Augenblicke der Oeffnung des polarisirenden Stromes gegeben ist:

$$C = \frac{B - \lambda \varepsilon j_0}{1 - \mu \varepsilon j_0}.$$

Wir wollen diese Formeln auf die Versuche von Hrn. Bernstein¹⁾ anwenden, die dieser mit seinem „Rheotom“ angestellt hat, die dann auch von Hrn. Arrhenius²⁾ wiederholt sind.

Hier wurde der polarisirende Strom immer nur sehr kurze Zeit ($< 0,001$ Sec.) geschlossen und dann, wieder nach sehr kurzer veränderlicher Zwischenzeit, die Polarisation des durch einen Widerstand geschlossenen Voltameters gemessen. Diese beiden Vorgänge wiederholten sich infolge der Rotation des Rheotoms, aber so, dass die Polarisation — ausser bei stärkeren Strömen — bereits unmerklich geworden war, bevor sie von neuem erzeugt wurde. Wir werden darum annehmen dürfen, dass keine merkliche Ansammlung occludirter Ionen zu Stande kommen konnte, und mit genügender Annäherung $b = 0$ setzen. Gleichung (43) nimmt dann die einfachere Form an:

$$(45) \quad \varepsilon j = \varepsilon j_0 \frac{e^{-xt}}{1 - \mu \varepsilon j_0 (1 - e^{-xt})},$$

wobei

$$\mu = \frac{c \beta}{c + a W s} = \frac{c}{P + \mathcal{L}}$$

und

$$x = \frac{c + a W s}{W s} = \frac{P + \mathcal{L}}{W s} \beta;$$

für den Werth der Polarisation selbst erhalten wir daraus:

$$(46) \quad p = p_0 e^{-xt} \cdot \frac{1}{1 - \frac{p_0}{P + \mathcal{L}} (1 - e^{-xt})}$$

1) J. Bernstein, Pogg. Ann. 155. p. 177. 1875.

2) Sv. Arrhenius, Beibl. 7. p. 913. 1893.

Diese Gleichung stellt uns nun vollkommen die Ergebnisse der Versuche von Bernstein und Arrhenius dar:

Die Polarisation nimmt zunächst ab annähernd nach dem Gesetz der Exponentialfunction, bald aber schwächer — denn e^{-x^t} wird dann merklich kleiner als 1, der Nenner der rechten Seite also ebenfalls, mithin $p > p_0 e^{-x^t}$.

Diese Abweichung vom Exponentialgesetz ist um so stärker, die Abnahme in derselben Zeit um so geringer, je höher der ursprüngliche Werth p_0 der Polarisation war — denn um so mehr weicht der Nenner von 1 ab.

Die Geschwindigkeit des Abfalles ist *etwa* umgekehrt proportional dem Widerstande W des Stromkreises — vergleiche die Bedeutung von x .

Wir finden also auch auf diesem Gebiete die Folgerungen unserer Theorie durch die Erfahrung gut bestätigt.

Wenn unsere Voraussetzung einer constanten Dichtigkeit der Grenzschicht nicht erfüllt ist, so wird die Entladung infolge der Diffusionsvorgänge natürlich nach anderen Gesetzen verlaufen, auch für die beiden Electroden im allgemeinen mit verschiedener Geschwindigkeit; vgl. diesbezügliche Versuche von Hrn. Fromme.¹⁾

20. Es erübrigt mir noch, auf die *Zahlenwerthe* der in den vorstehenden Rechnungen auftretenden Constanten einzugehen, soweit solche aus den bisherigen Messungsreihen sich mit einiger Sicherheit ergeben.

Zunächst die eigentlichen Polarisationsconstanten P , β und c , zwischen denen die Beziehung besteht: $P\beta = c$. Sie ergeben sich in absolutem Maasse aus den eingangs besprochenen sorgfältigen Versuchen von Hrn. Bartoli²⁾; dabei ist vor allem hervorzuheben, dass dieser bei den von ihm untersuchten Lösungen von H_2SO_4 , NH_3 , HCl , HBr und HJ obige Constanten *unabhängig* fand von der Natur der Electroden, die bei seinen Zellen aus Platin, Palladium, Gold und Graphit bestanden (für Retortenkohle ergab sich ein viel kleinerer Werth von β , was wohl mit Recht durch deren Porosität erklärt wird, die die Grösse s der Oberfläche zweifelhaft macht). Dem stehen

1) C. Fromme, l. c.

2) A. Bartoli, Nuov. Cim. (3) 7. p. 234. 1880 (Beibl. 4. p. 794).

nun zwar Versuche von Hallock¹⁾ entgegen, der das Maximum der Polarisation mit der Natur der Electrode veränderlich fand; indessen möchte ich auf die Bartoli'schen Versuche grösseren Werth legen, da bei ihnen secundäre Einflüsse (z. B. durch Veränderung der Lösungsconcentration) jedenfalls eher vermieden sind.

Um die Bartoli'schen Angaben in das jetzt übliche Maasssystem umzurechnen, ist zu beachten, dass er als Einheit der Electricitätsmenge den millionsten Theil derjenigen nimmt, die 1 ccm Knallgas von 0° und 760 mm entwickelt, also eine Grösse = $10^{-6}/0,174$ Coul.; die Electrodenflächen sind von Quadratmillimeter auf Quadratcentimeter umzurechnen. Da die Zusammensetzung des als Einheit der electromotorischen Kraft benutzten Daniell'schen Elementes nicht angegeben ist, so nehme ich hierfür den mittleren Werth 1,12 Volt, was freilich eine Unsicherheit von ± 5 Proc. bedingt. Ich berechne so folgende Werthe der Constanten für wässrige Lösungen bei einer Temperatur von $+5$ bis 7° C.:

Electrolyt	P in Volt	β in $\frac{\text{cm}^2}{\text{Coul.}}$	$c = P\beta$ in $\frac{\text{cm}^2}{\text{Farad.}}$
H ₂ SO ₄ verd.	2,24	33 380	74 770
H ₂ SO ₄ conc.	2,80	26 610	74 500
NH ₃	2,20	33 540	73 790
HCl	1,46	51 690	75 470
HBr	1,06	68 520	72 630
HJ	0,65	105 790	68 760

Es ergibt sich danach der schon von Hrn. Bartoli gezogene Schluss, dass innerhalb der Fehlergrenzen die Werthe von c für die obigen Stoffe gleich sind (bei HBr und HJ können schon secundäre Reactionen mitgewirkt haben), also:

„Die Initialcapacität ($1/c$) ist unabhängig von der Natur des Electrolyts.“

Das gleiche Ergebniss liefern für eine Anzahl weiterer Stoffe die Versuche von Hrn. Blondlot²⁾, der folgende *relative* Werthe der Initialcapacität angibt:

1) W. Hallock, Wied. Ann. **16**. p. 56. 1882.

2) R. Blondlot, l. c.

H ₂ SO ₄ verd.	ZnSO ₄	CuSO ₄	NaCl	KJ	Cu(NO ₃) ₂
1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,01
Na ₂ SO ₄	NiCl ₂	HCl verd.	HCl conc.	NaOH	KOH
0,96	1,10	0,75	1,19	1,50	1,50

Wir wiesen bereits darauf hin, dass bei Blondlot's Versuchen wegen ihrer längeren Dauer schon leichter als bei denen Bartoli's Reactionseinflüsse sich geltend machen konnten. Auffallend sind besonders die abweichenden Werthe für die HCl-Lösungen, deren Electrolyse bekanntlich für verschiedene Concentration verschiedene secundäre Erscheinungen aufweist.

Soweit nun das Gesetz der Unabhängigkeit der c von der Natur des Electrolyten gilt, ergibt sich, dass das Maximum P der Polarisation umgekehrt proportional der Grösse β . Es wird dadurch P zu einem Maass der „Zersetzbarkeit“ des Electrolyten, die ja durch unsere „Neutralisationsconstante“ β gekennzeichnet ist; je kleiner P , um so leichter, d. h. unter gleichen Umständen in um so grösserer Menge wird der gelöste Stoff zersetzt.

Daraus folgt weiter:

Falls die von Hrn. Le Blanc bestimmten kritischen Werthe der electromotorischen Kraft genügend genau mit dem Maximum der Polarisation zusammenfallen, kann man sie thatsächlich als „Zersetzungswerthe“ bezeichnen, freilich in anderem Sinne, als von ihm geschehen, nicht als Maass einer „Haftintensität“.

Aus gelegentlichen Messungen von Hrn. Kohlrausch¹⁾ bezüglich der Intensität von Wechselströmen, die durch ein Voltameter mit blanken Platinplatten in verdünnter Schwefelsäure gingen, ergibt sich ein Werth der von uns mit c/s (von ihm mit p) bezeichneten Grösse: $74800 \frac{\text{Siem.}}{\text{sec}}$, also, da $s = 1,08 \text{ cm}^2$ war:

$$c = \frac{74800 \cdot 1,08 \text{ Ohm} \cdot \text{cm}^2}{1,06 \text{ sec}} = 76200 \frac{\text{cm}^2}{\text{Farad}}$$

in sehr guter Uebereinstimmung mit den Bartoli'schen Angaben. Als absoluter Werth der Capacität selbst folgt aus letzteren

$$\frac{1}{c} = 13,4 \frac{\text{Microfar.}}{\text{cm}^2}.$$

1) F. Kohlrausch, Pogg. Ann. 148. p. 143. 1873.

Wir können nunmehr auch die bei rein condensatorischer Ladung durch eine electromotorische Kraft $A < P$ insgesamt neutralisirte Ionenmenge berechnen; sie ergibt sich nach Gleichung (18) für 1 qcm und $A = P/2$ zu

$$R = \frac{1}{\beta s} \left\{ e^{\log 2} - \frac{1}{2} \right\},$$

danach z. B. bei verdünnter Schwefelsäure zu

$$R = 6 \cdot 10^{-11} \text{ gr.-Aeq.}$$

Es lässt sich ferner die Geschwindigkeit ermitteln, mit der ohne Diffusionsvorgänge der stationäre Zustand erreicht wird; wir haben uns zu fragen, innerhalb welcher Zeit t $e^{-\alpha t}$ etwa auf $\frac{1}{1000}$ herabsinkt; nehmen wir z. B. $A - P = 1$ Volt, $W = 10$ Ohm, $s = 5$ qcm, und berechnen für verdünnte Schwefelsäure, also mit $\beta = 38\,000 \text{ cm}^2/\text{Coul.}$, so finden wir:

$$\alpha = 660 \text{ sec}^{-1},$$

danach die gesuchte Zeit t rund 0,01 Sec., übrigens proportional dem Widerstande W .

Was die sonstigen Angaben über das Maximum der Polarisation von Platinelectroden in Schwefelsäure betrifft, so weichen dieselben bekanntlich, selbst wenn man sich auf den Fall plattenförmiger Electroden beschränkt, noch ziemlich voneinander ab. Nach Bartoli's Versuchen scheint die Concentration der Säure wesentlichen Einfluss zu haben, und man wird darum in neuen Untersuchungen diesem Punkte grössere Aufmerksamkeit zuwenden müssen. Zur Messung werden solche Methoden vorzuziehen sein, die neben P auch noch die zweite Constante β liefern, bei denen aber die complicirenden Nebenvorgänge nach Möglichkeit beschränkt und vermieden sind.

Für die Grössen, die in unseren Rechnungen den Einfluss dieser letzteren messen sollen, insbesondere für die Constante α , lässt sich aus einigen vorliegenden Angaben wenigstens die Grössenordnung in absolutem Maasse angeben:

Lässt man ein geladenes Voltameter ungeschlossen sich entladen, also mit $W = \infty$, so klingt nach Gleichung (46) seine Spannung gemäss dem Gesetze $p = p_0 e^{-\alpha t}$ ab. Bei einem solchen Versuche mit einem Schwefelsäurevoltameter fand

Hr. Bernstein¹⁾ während 0,002 Sec. eine Abnahme um etwa 1 Proc.; daraus folgt:

$$a = 5 \text{ sec}^{-1}.$$

Werthe von a lassen sich ferner aus der Intensität des „restirenden“ Stromes berechnen nach unserer für kleine electromotorische Kraft gültigen Formel

$$J_0 = \frac{A a s}{c},$$

oder im Falle eine Electrode gegen die andere sehr gross, so dass $c/2$ an Stelle von c tritt:

$$J_0 = \frac{2 A a s}{c},$$

also

$$a = \frac{J_0 c}{2 A s}.$$

So gibt Hr. Arons²⁾ an, dass bei einem seiner Versuche für $A = 1 \text{ Meid.} = 1 \text{ Volt.}$ sich $J_0 = 10^{-5} \text{ Amp.}$ ergab; s ist auf etwa $1,5 \text{ cm}^2$ zu schätzen, danach

$$a = 0,25 \text{ sec}^{-1}.$$

Eine grosse Bedeutung kommt unzweifelhaft der Constanten c zu; wenn man noch bedenkt, dass nach den Versuche von Hrn. Bartoli mit concentrirter Schwefelsäure c sich zwischen 5° und 250° *unabhängig von der Temperatur* erweist, obwohl hier P von 2,80 bis 1,13 Volt abnimmt³⁾, so wird man sich sagen müssen, dass diese Constante von höchster Wichtigkeit für das ganze Erscheinungsgebiet ist. Es liegt die Frage nahe, ob c etwa mit der Natur des *Lösungsmittels* sich ändert; was die Polarisation in anderen Lösungsmitteln als Wasser angeht, so finde ich darüber eine kurze Angabe in Hrn. v. Helmholtz' Faraday-Rede⁴⁾, wonach das Maximum der Polarisation „im reinsten Alkohol, Aether und Terpentinöl

1) J. Bernstein, l. c.

2) L. Arons, l. c.

3) Die Neutralisationsconstante β hat also mit den chemischen Reactionscnstanten ein ziemlich starkes Anwachsen mit steigender Temperatur gemeinsam.

4) H. v. Helmholtz, Vorträge und Reden. 2. p. 275. 1884.

etwa 0,3 Dan., im Benzin 0,8 Dan. beträgt“. Auch neuer-Messungen von Hrn. Bouty¹⁾ sind wohl noch zu wenig sicher und klar. Die Frage lässt sich also noch nicht beantworten.

Ich hoffe, dass die Gesetze, die im vorstehenden aus wohlbestimmten Grundannahmen entwickelt sind, zur übersichtlichen Darstellung der Polarisationserscheinungen wesentlich beitragen und damit jene Grundvorstellungen als annehmbar erscheinen lassen. Diese werden freilich noch mancher Erweiterung bedürfen, namentlich, was die mehr chemische Seite der Frage anlangt. Im übrigen muss es eingehenden experimentellen Untersuchungen vorbehalten bleiben, die Entwicklungen noch weiter zu prüfen und die Werthe der Constanten besser und in weiterem Umfange zu bestimmen, als es bisher geschehen ist. Ich bin selbst mit Versuchen in dieser Richtung beschäftigt.

Leipzig, Phys. Inst. d. Univ., August 1893.

1) E. Bouty, *Compt. rend.* **116.** p. 691. 1893.

**4. Einige Formen von Tauchelectroden
für Widerstandsbestimmung in Electrolyten;
von F. Kohlrausch.**

(Hierzu Taf. V Fig. 1–3.)

Es kann bequem oder sonst vortheilhaft sein, die electriche Leitfähigkeit von Flüssigkeiten zu bestimmen, ohne die letzteren aus ihren Flaschen etc. ausgiessen zu müssen.

Die folgenden Formen von Electrodenpaaren, die man einfach in das Gefäss mit der Flüssigkeit eintaucht, machen Gebrauch von der Thatsache ¹⁾, dass man gut platinirte Electroden erheblich kleiner wählen kann als gewöhnlich, ohne Fehler durch Polarisation befürchten zu müssen.

Für die Zuleitungen zu den Electroden habe ich gläserne Doppelcapillaren äusserst zweckmässig gefunden, welche Hr. Schilling in Gehlberg auf meine Veranlassung herzustellen die Gefälligkeit hatte. Ihre Anfertigung scheint keine Schwierigkeit zu bieten. Sie werden auch manchen anderen Zwecken dienen können. Für die vorliegende Anwendung empfiehlt sich eine Weite der Höhlungen von $1\frac{1}{2}$ mm.

Die zu beschreibenden Vorrichtungen kann man sich mit einiger Uebung im Glasblasen selbst verfertigen. Der Glasbläser Hr. Meschenmoser in Strassburg ist aber bereit, dieselben zu liefern.

1. *Ebene Tauchelectroden für schlecht leitende Flüssigkeiten.* Fig. 1. (nat. Gr.) erläutert dieselben wohl ausreichend. Zwei 15 mm lange, $\frac{3}{4}$ mm dicke Platindrähte, an welche die etwa Quadratcentimeter — grossen Electroden aus $\frac{1}{4}$ mm dickem Blech angeschweisst sind, werden in die unteren Enden der Capillaren eingeschmolzen. Zur Bequemlichkeit mag man die beiden Electroden als ein zusammenhängendes Stück schneiden,

1) F. K. Wied. Ann. 49. p. 234. 1893.

umbiegen und bis auf einen kleinen zusammenhaltenden Rest an dem Knick durchfeilen. Dann kann man sie bei dem Einschmelzen mit einer (eisernen) Pincette noch gemeinsam fassen und nachher trennen und zurechtbiegen.

Schliesslich bläst man über das Doppelrohr das unten offene, oben mit einer kleinen Oeffnung versehene Schutzrohr, welches die Electroden vor mechanischer Verletzung hütet, ausserdem aber bewirkt, dass nicht Stromlinien austreten, die von der Tiefe des Eintauchens oder der Breite der Flüssig- abhängen.

Die bei dem Blasen in die Röhren gelangte Feuchtigkeit beseitigt man mit der Wasserluftpumpe.

Die Zuleitung zu den Electroden wird, wie bei den Widerstandsgefässen von Arrhenius, durch Quecksilber vermittelt, welches man mittels Schleudern von Luftblasen befreit. Zum ersten Einfüllen dient ein über das obere offene Ende der Doppelcapillare geschobenes Stückchen Gummischlauch mit etwas Quecksilber, welches eindringt, nachdem man mit dem Munde oder der Wasserluftpumpe etwas Luft ausgesogen hat.

Kupferdrähte, die man oben mit Guttapercha, Marineleim, Wachs und Colofonium oder dgl. einkittet, leiten den Strom zum Quecksilber.

Die Röhren wählt man so lang (20 bis 30 cm), wie es die Bequemlichkeit für das Einführen in die Flaschen etc. erfordert.

Gut platinirte Electroden von 1 mm Abstand sind für reines Wasser (100 000 Ohm im Durchschnitt) bis zu etwa $\frac{1}{100}$ -Normal-Salzlösungen (100 Ohm im Durchschnitt) brauchbar. Das Tonminimum büsst im letzteren Falle durch die Polarisation an Schärfe ein, aber nicht so viel, dass man nicht noch auf $\frac{1}{1000}$ sicher messen könnte. Electroden von 10 mm Abstand reichen bis etwa $\frac{1}{10}$ normal. Im letzteren Fall macht man, um austretende Stromlinien zu vermeiden, das Schutzrohr unten etwas länger oder enger.

Natürlich steht, ausser der etwaigen Enge der Flaschenhäuse, nichts im Wege, die Dimensionen der Electroden und die Abstände zu vergrössern, wodurch das Minimum *et. par.* besser wird.

Verfügt man nur über eine kleine Flüssigkeitsmenge, so kann man dieselbe in einen Reagircylinder füllen; man kann auch die kleine Oeffnung des Schutzrohres verstopfeln, die Vorrichtung umkehren und sie als Gefäß verwenden.

2. *Cylindertauchelectroden für sehr schlecht leitende Flüssigkeiten*, z. B. für Wasser (Fig. 2). Die unter 1 beschriebenen Electroden geben bei der Untersuchung von Wasser Widerstände etwa bis 100 000 Ohm, die man ohne einen recht langen Brückendraht schlecht bestimmen kann. Grosse ebene Electroden mit etwa 1 mm Abstand sind wegen kleiner Formveränderungen leicht inconstant. In folgender Weise kann man diesen Uebelständen durch concentrische Electroden abhelfen.

Das Doppelcapillarrohr wird an einer Stelle durch Aufblasen oder durch Umlegen eines Ringes von Einschmelzglas um reichlich 1 mm verdickt. Bis unter diese Stelle schiebt man über das Rohr einen gut passenden Cylinder von dünnen Platinblech, den ich durch Verlöten mit Gold leicht herstellt habe. Macht man die Weite desselben etwas knapp, so gelingt es, unter Benutzung der immer etwas konischen Form des Glasrohres, durch Reiben mit einem blanken Eisen während des Aufschiebens den Cylinder gerade passend auszuweiten. Alsdann wird der angeschweisste Zuleitungsdraht durch eine dicht unter dem Cylinder in eine der Capillaren geblasene Oeffnung eingeschmolzen und daselbst zugleich durch Aufblasen oder mit umgelegtem Glas eine Verdickung der Röhre bewirkt, so wie die obere.¹⁾

Nun verfertigt man einen 15 mm längeren Cylinder aus nicht zu schwachen Blech, welcher sich über die Verdickungen schieben lässt, versieht denselben oben und unten mit einigen Löchern zur Circulation, schiebt ihn über, befestigt ihn nöthigen-

1) Das nothwendige sorgfältige Kühlen ist wegen des Brüchigwerdens des Platins nicht gut in der russenden Flamme vorzunehmen. Ein gewöhnlicher Gasargandbrenner, der dicht über seinem Cylinder das Glas noch weich werden lässt, eignet sich zum Kühlen sehr gut, indem man nach und nach die Flammen kleiner dreht oder mit dem Glase höher hinaufgeht. (Auch zum Biegen dünner Röhren kann der Raum über einem Argandcylinder mit seiner gleichmässigen Temperatur oft angenehmer sein, als die russende Flamme.)

falls durch Umbiegen seiner Enden über die Verdickungen und durch Anbinden mit Draht und schmilzt seinen Draht in die zweite Capillare ein. Schliesslich kann ein Schutzrohr gegen mechanische Verletzungen umgelegt werden wie bei 1. Die Zuleitungen werden ebenso hergestellt wie dort.

So hergestellte Electroden, von denen die innere 3 cm lang war, hatten eine Quecksilbercapacität von $8 \cdot 10^{-7}$ Ohm; sehr reines Wasser gibt also einen Widerstand von höchstens 10,000 Ohm, der sich noch mit gewöhnlichen Mitteln bestimmen lässt. Die kleine Brücke¹⁾ z. B., welche Hartmann und Braun verfertigen, reicht aus.

Allerdings müssen diese Electroden nach der Herstellung, oder wenn sie in einer besser leitenden Flüssigkeit gewesen sind, von den zwischen die innere Electrode und das Glas gedungenen leitenden Theilen durch längeres Auswässern, am besten warm, befreit werden.

Um dies zu vermeiden, habe ich auch Cylinderelectroden verfertigt, von denen auch die innere nicht fest auf dem Glase aufsitzt und Circulationsöffnungen hat. Dies ist aber umständlicher.

Ueberhaupt ist die Herstellung dieser Electroden weniger leicht als die der unter 1 beschriebenen.

3. *Tauchelectroden für gut leitende Flüssigkeiten* (Fig. 3). Solche sind wieder leicht anzufertigen. Man befestigt einfach zwei dünne (2 cm lange) Bleche in geeignetem Abstände (5 bis 10 cm) von einander auf dem Glasrohr, wobei es genügt, dieselben umzuwickeln und je an zwei Stellen mit dünnem Platindraht festzubinden. Die Lage wird hierdurch und durch die beiden in die Capillare eingeschmolzenen Zuleitungsdrähte hinreichend gesichert. Die Bleche werden gut platinirt.

Die Widerstandscapacität wird durch den Abstand der Electroden und die Weite des überzuschmelzenden Schutzrohres bestimmt, innerhalb dessen der Strom übergeht. (Die obere Oeffnung des Schutzrohres ist hier selbstverständlich

1) F. K., Zeitsch. d. Electrotechn. Vereins in Wien. Dec. 1883. Ich habe die Hrn. Hartmann und Braun veranlasst, den Widerständen ein Stück von 10 000 Ohm, nach Chaperon unifilar alternirend gewickelt, hinzuzufügen.

nicht unterzutauchen). Soll das Rohr für sehr gut leitende Flüssigkeiten dienen, so kann man das Schutzrohr zwischen, *nicht an* den Electroden einengen, so wie in der Zeichnung.

Die Electrodenflächen werden freilich bei dieser Gestalt nicht gleichmässig für den Strom ausgenutzt, aber die Erfahrung zeigt, dass man die gegen die Polarisation nothwendige Wirkungsgrösse mit dem Obigen erreicht.

Strassburg, Nov. 1893.

5. Ueber haltbare dünne Blättchen mit Newton'schen Ringen; von F. Kohlrausch.

Die in der vorigen Mittheilung benutzten Doppelcapillarröhren geben bei dem Aufblasen vor der Lampe eine Kugel mit einer Scheidewand; die Mitte der letzteren pflegt unter der Wirkung der spannenden Kräfte während des Aufblasens sich zu grosser Feinheit auszustrecken und die Membran zeigt dann recht lichtstarke Farbenringe. Die Feinheit steigert sich mit der Höhe der angewandten Temperatur. Wenn man zuerst eine kleine Kugel (1 cm Halbmesser) bläst, diese wieder erhitzt und dann zu 3 bis 4 cm aufbläst, so können innerhalb der Farbenringe Flächen bis zu etwa 6 qcm entstehen, welche fast kein Licht mehr reflectiren, deren Dicke also nach Hunderttausendsteln eines Millimeters zählt. Doch hielten diese Membrane sich immer höchstens einige Stunden; die kleinen Bewegungen, welche bei der geringsten Erschütterung in ihnen vorhanden sind, werden das schliessliche Brechen an einer Stelle und dann das Auseinanderplatzen oder -rollen bewirken. Kleinere derartige Flächen sind etwas beständiger, pflegen aber ebenfalls nicht dauernd zu halten.

In der Regel schliessen sich hieran die Farben in der bekannten Reihenfolge continuirlich an. Aber auch einen scharf begrenzten schwarzen Fleck von 6—7 mm Durchmesser habe ich erhalten, der auf dem grössten Theile seines Randes an ein Weiss erster Ordnung, auch mit der Lupe gesehen, merklich direct anstösst. Man hält denselben beim ersten Anblick für ein Loch in der Membran; auf dunklem Hintergrunde aber bemerkt man noch eine ganz schwache Spur von Lichtreflex. Ich erinnere mich nicht, in Flüssigkeitshäutchen schwarze Flecke von solcher Ausdehnung gesehen zu haben. Das Aussehen ist über die ganze Fläche gleich.

Dass dieser scharf begrenzte Fleck haltbar ist, während diejenigen, welche allmählich in die dickeren Theile verlaufen, nach einiger Zeit zerstört sind, stimmt mit den Erfahrungen von Reinold und Rücker¹⁾ über die Haltbarkeit der schwarzen Flecke in Seifenblasen. Etwas überraschend ist es immer-

1) Reinold u. Rücker, Phil. Trans. 177. p. 627. 1886.

hin, dass starr gewordene Membrane diese Eigenschaft der flüssigen zu theilen scheinen.

Die auftretenden Farben sind bei Glas etwa doppelt so lichtstark als bei Wasser. Auch im durchfallenden Licht treten diejenigen zweiter und dritter Ordnung, besonders bei schräger Haltung der Lamelle vor eine kleine helle Fläche als eine auffällige Erscheinung hervor.

Die Herstellung der Blättchen betreffend soll noch aufmerksam gemacht werden darauf, dass man die in die Kugeln geblasene Feuchtigkeit, welche sonst nach dem Abkühlen trübt, durch zwei- bis dreimaliges Evacuiren mit der Wasserluftpumpe unter Zwischenschaltung eines Trockenrohres entfernt. Als dann schmilzt man die Kugel an einer vorher verdünnten Stelle des Rohres ab. Je dünner die Blättchen sind, desto langsamer ist der Luftwechsel vorzunehmen, damit dieselben nicht durch unsymmetrischen Druck zerstört werden.

Die Blättchen sind so biegsam, dass sie schon durch einseitiges Erwärmen der Kugel mit der Hand oder durch Bestrahlen sich aufblähen.

Dieselben ganz eben zu erhalten, gelingt nicht. Bei der Abkühlung der äusseren Wände bilden sich *Faltungen*, welche aber an sich eine hübsche Erscheinung bilden, besonders, wenn sie fächerartig vom Stiele in regelmässigen Intervallen durch die Membran laufen oder wenn sie, an vier Stellen der Peripherie ansetzend, ein Kreuz bilden. Wie Hr. Quincke mir mittheilt, stellen sie gute Beispiele der von ihm behandelten wellenförmigen Lamellen dar.¹⁾

Zum Schluss will ich noch bemerken, dass eben aufgeblasene oder frisch angewärmte Kugeln nicht selten während der Abkühlung einen gut ausgeprägten *Ton* gaben, der bis zu $\frac{1}{2}$ Min. andauern konnte. Die Tonerregung dürfte durch die eintretende kalte Luft bewirkt werden, die sich erwärmt und ausdehnt, zurücktritt und sich abkühlt etc.; also eine Art von Trevelyan-Instrument mit Luft anstatt Blei. Die beiden Luftsäulen werden dabei entgegengesetzte Phase haben.

Strassburg, November 1893.

1) Quincke, Berl. Sitzungsber. 1888. p. 789; Wied. Ann. 35. p. 561. 1888.

6. Einige Versuche über die sogenannte Wasserfallelectricität; von K. Wesendonck.

(Hierzu Taf. V Fig. 4—6.)

Bei Gelegenheit der Versuche über Electricitätsentwicklung durch Reibung von Gasen an Metallen, sah ich mich veranlasst, auch der Reibung von Wasser an festen Körpern einige Aufmerksamkeit zu schenken. Zufällig gebildetes Wasser¹⁾, wenn von einem Gasstrome heftig in Bewegung gebracht, machte sich in zwei Fällen durch starke Erregung negativer Electricität recht störend bemerkbar; nach dem Vorgange von Faraday und Sohncke angestellte zahlreiche Versuche über die Wirkungen von Nebeltheilchen²⁾, die beim Entspannen von Luft gebildet gegen ein isolirtes Metallstück getrieben werden, bewirkten, wie zu erwarten, recht starke Effecte.³⁾ Dies gab denn Veranlassung gelegentlich der Frage näher zu treten, ob stärkere Electricitätsbildung auch sich einstelle bei Reibung zwischen isolirtem Metall und einem Wasserstrahl, oder dem Wasserstaube eines durch einen Blasebalg in Gang gesetzten metallenen abgeleiteten Zerstäubers⁴⁾, weiter bei Wasser, welches von einem mässig starken Gasstrome gegen ein Metallstück getrieben wird. Es kam hierbei hauptsächlich nur darauf an, nachzusehen, ob beim Anprallen solcher nicht allzuheftig bewegter Wassertheilchen gegen das noch trockene Metall schon *stärkere Ladungen* erzielt werden können. Der Erfolg war in Uebereinstimmung mit den Hrn. Elster und Geitel selbst bei Verwendung von destillirtem Wasser ein wesentlich negativer, es zeigten sich nur sehr ge-

1) Wied. Ann. 47. p. 544 u. p. 554. 1892.

2) Wied. Ann. 47. p. 559—562. 1892.

3) Eine kreisrunde Metallscheibe von 6 cm Durchmesser ergab, wenn von einem reichlich feuchten Entspannungsgestrom getroffen, am Exner'schen Electrometer einen grossen positiven Ausschlag.

4) Dieser gehörte zu einem sogenannten Inhalationsapparate, wie sie zu Heilzwecken Verwendung finden.

ringe oder ganz unbestimmte Bewegungen ¹⁾ des Electrometers, sodass in Anbetracht der vorhandenen mannigfachen Fehlerquellen kleine constant eintretende Ausschläge ²⁾, wie sie z. B. positiv mit dem Verstäuber erhalten wurden, keine weitere Beachtung fanden, zumal eine eingehendere Untersuchung der Tröpfchenreibung damals nicht in der Absicht lag. Auch war die Aufstellung der Apparate in einem Metallkasten, um Influenz seitens der Umgebung zu verhüten, für länger andauernde und kräftige Spritzversuche wenig geeignet, da die isolirenden Stützen unter solchen Umständen leicht feucht werden. Als mir daher die schönen Versuche ³⁾ des Hrn. Lenard bekannt wurden, erregten sie mein grösstes Interesse, war ja durch dieselben nicht nur eine *neue ergiebige, bisher merkwürdigerweise anscheinend ganz unbekannt* ⁴⁾ gebliebene *Electricitätsquelle* aufgedeckt worden, deren Wichtigkeit für das Verständniss gewisser meteorologischer Erscheinungen auf der Hand liegt, sondern sind die betreffenden Untersuchungen auch noch von *ganz besonderer theoretischer Bedeutung*, wegen der sich dabei ergebenden Erklärung der beobachteten Erscheinungen durch electricische Contactwirkung zwischen Flüssigkeit und umgebendem Gase. Da sich nämlich einmal Reibung als Ursache der erhaltenen Ladungen nicht nachweisen liess, andererseits der beim Sturze gebildete Wasserstaub nicht als Träger der negativen sogenannten Wasserfallelectricität erschien, so wird geschlossen, die Luft sei negativ electrirt. Zur Erklärung dieser Ladung dient denn die Annahme ⁵⁾, es bilde sich an der Oberfläche der Flüssigkeit durch Contacterregung mit dem umgebenden Gase eine Doppelschicht, bei Verkleinerung der Oberfläche, wie solches beim Auftreffen und

1) Auch wenn in einem kleinen polirt aufgestellten Metallbecher Kältemischung gebracht und der so erzeugte Wasserniederschlag mittelst eines Gebläses hinweggefeht wurde, trat keine merkliche bestimmte Ladung ein.

2) Nur Bruchtheile eines Daniell.

3) Wied. Ann. **46**. p. 584—637. 1892. Es soll in Zukunft auf diese Abhandlung einfach mit l. c. verwiesen werden.

4) Ueber einschlägige Versuche des Hrn. Eckholm ist mir nichts Näheres bekannt.

5) l. c. Nr. **43**. p. 631. Wegen aller Einzelheiten muss auf die Abhandlung des Hrn. L. verwiesen werden.

Zusammenfliessen von Tropfen der Fall, werde dann negativ geladene Luft hinweggetrieben, während die entsprechende positive Electricität in der Flüssigkeit verbleibe. In der That versteht es Hr. Lenard gut, seine Auffassung der betreffenden Erscheinungen recht plausibel zu machen, nur erschien mir nicht völlig erwiesen, ob nicht doch noch Reibung zwischen sehr kleinen stark gekrümmten Tröpfchen und ebenen resp. erheblich weniger gekrümmten Flüssigkeitsoberflächen wenigstens mit im Spiele ¹⁾ sei. Solche minimale Partikelchen können ja von dem Luftstrome mitgeführt, lange mit diesem vereinigt bleiben, während grössere Tröpfchen sich davon trennen. Daher erschien es mir nicht ganz ohne Interesse, neben einer Wiederholung einiger der von Hrn. Lenard angestellten Untersuchungen, auch eine Reihe von Experimenten darüber vorzunehmen, ob längs Wasserflächen hingleitender Nebel bemerkenswerthe electricische Phänomene zeige. Es hat sich dabei wesentlich nur eine *Bestätigung der Lenard'schen Beobachtungen* ergeben. Da aber unsere Kenntniss der Wasserfallelectricität noch sehr jung ist und die vorliegenden Versuche eine einigermaassen andere, zum Theil recht einfache, und wie mir scheint lehrreiche Wiederholung der Lenard'schen Untersuchungen gestatten, so seien dieselben in dem Folgenden kurz wiedergegeben. ²⁾

Es gelang zunächst leicht mittelst einer durch die Berliner Wasserleitung gespeisten Brause, aus der das Wasser in eine metallene Badewanne hineinstürzte, und einem daneben aufgestellten mit Flammencollector versehenen Exner'schen Electroskope die l. c. p. 588 angeführten Resultat ein eclatanter Weise zu bestätigen. Sehr bald divergirten die Aluminiumblättchen mit negativer Electricität bis zur Entladung, um aufs Neue auseinanderzugehen, sich wieder zu entladen etc. Ebenso wurde der l. c. p. 606 beschriebene und Taf. III Fig. 6 abgebildete Versuch bei Verwendung eines allerdings einigermaassen provisorisch zusammengestellten Apparates bis auf

1) Allerdings sprechen gegen eine solche Erklärung die l. c. p. 596 mit getheilten Beobachtungen. Eine electromotorische Wirkung zwischen ebenen und gekrümmten Quecksilberflächen hat Des Coudres, Wied. Ann. 46. p. 292. 1892 nachgewiesen.

2) Die meisten der hier beschriebenen Versuche wurden im Sommer 1893 angestellt.

einen Punkt mit vollständigem Erfolge wiederholt. Während das obere Gefäß, aus dem das destillirte Wasser unter dem Drucke comprimierter Luft durch eine feine Glasspitze ausströmte, keine Ladung zeigte, auch wenn bei möglichst starkem Drucke und langanhaltendem Ausströmen gearbeitet wurde, fand sich der mit einer Auffangeplatte versehene Zinkeimer, in welchen der Strahl sich ergoss, sehr bald *stark positiv*, wie das damit verbundene Exner'schen Electroskop anzeigte. Merkwürdigerweise ergab Verbindung des Eimers mit dem oberen Gefäße ohne angebbaren Grund stets und zwar etwas schwächere negative Ladung auch bei sorgfältig wiederholten Versuchen. Da die Zusammenstellung wie gesagt nur eine provisorische war, wurde dieses eigenthümliche Verhalten nicht weiter untersucht, zumal ja die beiden angeführten Versuche die Richtigkeit der Wesentlichen von Hrn. Lenard's Angaben vollkommen bestätigten, *nämlich die negative Ladung der Atmosphäre* (Brauseversuch) und *die positive eines getroffenen starren Körpers*. Nunmehr wurde noch der l. c. unter Nr. 38, p. 621 u. ff. beschriebene und Fig. 8 Taf. III abgebildete Versuch angestellt, den Hr. Lenard nebst einem solchen mit einzelnen fallenden Tropfen als am reinsten die Erscheinungen wiedergebend bezeichnet.¹⁾ Ein dem angegeben ganz ähnlicher Apparat wurde construirt, wobei der die untere Wanne mit dem Tropfgefäß verbindende Draht mit einem Thomson'schen Quadrantelectrometer communicirte. Zur objectiven Ablesung der Bewegungen des ebenen Spiegels diente die dem Instrument beigegebene Skala (in etwa 1 m Entfernung), auf deren Mitte mit Hülfe einer Convexlinse das Bild eines beleuchteten Drahtes entworfen wurde. Ungefähr 50 Theilstriche entsprechen einem hohen Daniell.²⁾ Liess man nun aus dem an Seidenfäden aufgehängten Tropfgefäß durch ein kleines mit Hahn verschliessbare am Ende ca. 1 mm weite messingenes Ausflussröhrchen Wasser in die Wanne hinabströmen, so ergab sich nach kurzer Zeit eine kleine positive Bewegung des Lichtzeigers, also in

1) O. Lenard, l. c. p. 635.

2) Diese Empfindlichkeit genügte, da wesentlich *nur energische Bewegungen* in Betracht gezogen werden sollten, von denen nicht anzunehmen, dass sie auf Fehlerquellen beruhen. Von der Mitte zum Ende der Theilung lagen je 500 Theilstriche der Scala.

dem Sinne wie Hr. Lenard gefunden, welche eine Grösse nahe der einem Daniell entsprechenden erreichte. Derselbe Apparat fand nun Verwendung, nachdem das Tropfgefäss entfernt, zu einigen Experimenten, bei denen die Wirkungen von gegen oder über die Wasserfläche hin geblasenen Nebel beobachtet werden sollten. Zur Erzeugung des Wasserstaubes dienten käufliche Zerstäuber, wie sie zur Produktion von Nebeln von Medicamenten, Parfümerien etc. in Gebrauch sind, zumeist ein kleines von Gebr. Fonrobert¹⁾ bezogenes Instrument, das mit destillirtem Wasser beschickt durch ein Gummigebläse von bekannter Construction in Thätigkeit gesetzt wurde.²⁾ Stellte man den Verstäuber neben der Wanne auf, sodass das Ausflussrohr *cd* (Fig. 4) eben über deren Rand hinüberragte, und liess nun den vor der Mündung sichtbaren *wolkigen Strahl* gegen das in der Wanne befindliche destillirte Wasser sprühen, so erreichte man ohne Schwierigkeit, dass der *Lichtzeiger positive Ladung angehend aus der Scala verschwand* und sich mittelst eines Papierschirmes noch weit ausserhalb derselben nachweisen liess, so dass Ladungen von 15, 20 und mehr Daniells auftreten konnten.³⁾ Hierzu musste allerdings der Verstäuber gut functioniren und recht reichlich Wasserstaub liefern, zumeist wurde zu seinem Betriebe ein eigens angefertigtes kräftiges Gebläse verwendet, doch erhält man auch mit einem gewöhnlichen käuflichen oft gute Resultate. Geringe Verstopfung der Verstäuber, auch wenn dieser dabei scheinbar noch ganz gut arbeitet, setzen die Wirksamkeit stark herunter, es erscheint dringend zu wünschen, dass derselbe in

1) Berlin, Leipzigerstr. 30.

2) Bei diesen Verstäufern Fig. 4, Taf. V wird die Flüssigkeit durch eine enge Messingröhre abgetrieben, welche in die weitere und kurze Zinnröhre *cd* sich hineinerstreckt, durch welche von *f* aus die Luft streicht, die Flüssigkeit erfasst und durch eine enge Oeffnung bei *d* dieselbe treibend sie in feine Nebel zertheilt. Solche kann man mit diesem kleinen Instrumente verhältnissmässig leicht und reichlich erzeugen. An *f* wird das Gebläse angesetzt, die Luft, welche nur theilweise bei *e* entweicht drückt das Wasser in dem dicht verschlossenen Gefässe A durch *ab* hinaus.

3) Man erhält übrigens auch starke positive Ladungen wenn man einfach in die trockene Wanne hineinstäubt. Auf der Oberfläche schwimmende Staubtheilchen und dergleichen befördern keineswegs die Electricitätsbildung merklich.

ganz gutem Zustande erhalten werde, wenn die Versuche nach Wunsch gelingen sollen. Dagegen ist es für den Erfolg wesentlich gleichgültig, ob die Metalltheile des Verstäubers abgeleitet, ganz isolirt oder mit der Wanne in Contact sind. In letzterem Falle musste er natürlich sorgfältig isolirt aufgestellt werden und hat man darauf sehr zu achten, dass in Folge Feuchtwerdens die Isolirung nicht leidet. Die Güte der letzteren prüfte man vor jedem wichtigeren Versuche besonders, indem den mit dem Electrometer verbundenen Apparaten eine Ladung ertheilt, und deren genügendes Constantbleiben beobachtet wurde. Er ist eine häufige Controlle bei derartigen Versuchen dringend geboten, wie leicht zu verstehen. Auch das Gummigebläse kann unter Umständen störende Ableitung bewirken, man thut dann gut, es nicht direct an den Verstäuber anzusetzen, sondern unter Zwischenschaltung einer Glasröhre, die man eventuell von Zeit zu Zeit erhitzt. Die Mündung des Verstäubers befand sich, um Influenz der Umgebung zu vermeiden, stets innerhalb des grossen Drahtkäfigs, häufig stand jener auch ganz im Innern des Schutzkastens. Dass nicht etwa Durchblasen von Luft allein, oder Ladung des Gummis beim Betrieb des Gebläses das Electrometer irgend erheblich beeinflusste, wurde natürlich besonders constatirt, und gilt diese Bemerkung auch für alle folgenden Versuche. Die beiden Bälle, sowohl der erste, welcher mit der Hand zusammengedrückt und dann wieder sich ausdehnen gelassen wird, wie der zweite als Windkessel dienende, die dem Gebläse angehören, waren stets ausserhalb des Drahtkäfigs angebracht, nur der zum Verstäuber führende Schlauch trat eventuell in denselben ein. *Die Constanz der Resultate, das Vorzeichen der Ladung betreffend, die Grösse dieser*¹⁾ *bei einigermaassen gutem Gange des Verstäubers, die oben erwähnte Unabhängigkeit der Resultate von der Art der Aufstellung desselben zeigen wohl schon deutlich, dass es sich in unserem Falle nicht um Influenzelectricität handelt.* Hätten selbst etwa in der Atmosphäre schwebende Staubtheilchen stets eine Ladung desselben Vorzeichnens, so müssten doch Wasserstaub und Verstäuber entgegengesetzt electricirt werden und sich ausgleichen resp. eher die Elec-

1) Siehe auch die weiter unten beschriebenen Versuche unter Verwendung eines Goldblatt- oder Exner'schen Electrosopes.

tricität des Letzteren zum Vorschein kommen, wenn Wanne und Verstäuber miteinander verbunden sind. Von einiger Bedeutung war jedoch die Richtung, in welcher der Nebel die Oberfläche des Wassers traf.

Geschah dies möglichst senkrecht so ergab sich ein merklich langsames Anwachsen der Ladung als wenn der Nebel der Oberfläche des Wassers in der Wanne thunlichst entlang strich In ersterem Falle erreicht z. B. der Lichtzeiger cet. par. das Ende der Skala in 37 Secunden, in letzterem schon in 25, und ähnliche Unterschiede ergeben sich wiederholt.¹⁾ Richtete man indessen die Mündung des Verstäubers und also auch den Nebelstrahl schräg in die Höhe, so dass der Wasserstaub eine Art Springbrunnen bildend in die Wanne hinein regnete, so war aber die Wirkung mindestens ebenso stark, wie beim Blasen in nahezu horizontaler Richtung. Auch wenn man möglichst hoch²⁾ von oben, etwa durch eine Masche des Drahtkäfiges hindurch den Verstäuber einfach in der Hand haltend, in die Wanne hinabpustet, ergaben sich starke positive Ladungen. Die stärkere Electricitätserregung bei horizontalem Streichen des Wasserstaubes darf also nicht wie man vielleicht anzunehmen geneigt ist, der vermehrten Reibung zwischen Nebel und Wasseroberfläche zugeschrieben werden, man kann dieses Verhalten nach Hrn. Lenard wohl so erklären, dass bei senkrechtem Blasen gegen das Wasser in der Wanne verhältnissmässig viel Luft mit unter dessen Oberfläche gerissen wird, wodurch cet. par. die Erregung kleiner ausfällt (l. c. p. 600). Einzelne herabfallende Tropfen, wie das beim Springbrunnenversuch wohl wesentlich der Fall, nehmen viel weniger Luft mit und sind daher auch relativ wirksamer³⁾ (l. c. p. 610).

Leitete man die Wanne ab, stellte isolirt innerhalb des

1) Die Bedingung der cet. par. streng zu erfüllen ohne Druckmessungen etc. ist natürlich nicht möglich, indessen kann man bei etwas Uebung dies doch einigermaassen erreichen. Gut thut man, den Windkesselball, bevor das Sprühen beginnt, aufzublasen, indem man den zum Verstäuber führenden Schlauch zuklemmt, und dann erst, wenn ein erwünschter Druck erreicht, die Verbindung mit dem Verstäuber öffnet.

2) Wie schon bemerkt, stand der Verstäuber bei den bisherigen Versuchen möglichst nahe der Wasserfläche, um ein Parallelstreichen des Wasserstaubes über dieselbe hin erreichen zu können.

3) Vgl. auch weiter unten p. 362 Anm. 1.

Drahtkäfigs und mit dem Electrometer verbunden einen Flammen-collector auf, wie solche den Exnerschen Electroskopen beigegeben werden, *so war es leicht, starke negative Electricität in der Atmosphäre des Schutzkastens nachzuweisen*, wenn bei gut functionirendem¹⁾ Verstäuber kräftig Wasserstaub in die Wanne sprühen gelassen wurde. Die Flamme darf dabei jedoch nicht zu hoch über der Stelle sich befinden, wo der Wassernebel auftritt, während die horizontale Entfernung in unseren Versuchen als weit weniger wichtig sich erwies. Manchmal fand sich als günstige Stellung des Lichtes eine gewisse mittlere Höhe, immer jedoch war dies nicht der Fall, es stellten sich bisweilen die stärksten Wirkungen ein, wenn der Collector recht nahe und recht wenig über dem Platze angebracht war, wo der Wasserstaub auftritt. Ein directes Bespritzen der Aufsaugapparate ist thunlichst zu vermeiden einmal wegen möglicher Electricitätsbildung dabei²⁾, dann auch weil die Isolation hierbei leicht leidet, will man sehr nahe an den Wasserstaub herangehen, so empfiehlt es sich, den Collector an einem langen isolirenden horizontalen Arm zu befestigen, der an einer relativ entfernten Stelle gestützt ist. Negative Electricität bildet sich auch sehr reichlich wenn man einfach auf den Boden resp. darauf gelegte das Wasser einsaugende Tücher, den Strom des Wasserstäubers richtet. Man kann dabei diesen einfach mit der Hand fassen und durch eine Masche des Drahtkäfigs hindurch, sie berührend, die Ausflussröhre in den Schutzkasten hineinhalten, oder aber den Verstäuber ganz isolirt in letzteren aufstellen, das Resultat bleibt dasselbe. Steht das Licht möglichst hoch, so zeigt es nur noch sehr wenig negative Electricität an, oft kaum 1 Dan., auch wenn man den Verstäuber ebenfalls so hoch als angeht, placirt. Der Collector kann dabei dem Nebel und der Mündung der Ausflussröhre beliebig genähert werden, *der Wasserstaub tritt also so gut wie unge-*

1) Die Versuche mit dem Flammencollector sind aus begreiflichen Gründen etwas precärer als die über die positive Ladung angespritzter Körper. Arbeiten die Apparate nicht in ganz guter Weise, so erhält man leicht sehr wechselnde Resultate in Betreff der Stärke des negativen Potentials (5 Dan. — 20 Dan.).

2) Stärkere Erregung von Reibungselectricität bei vom Nebel der Verstäuber getroffenen Isolatoren konnte ich übrigens nicht bemerken.

laden aus dem Verstäuber heraus. Sobald das Licht aber herab geschoben wird, tritt wieder energische negative Ladung auf. Ganz entsprechend Hrn. Lenard's Angaben entsteht *Electricität also erst beim Auftreffen auf den Boden* resp. eine Wasserfläche, *das Vorzeichen der Ladung ist unabhängig* in weitem Umfange von der Natur des getroffenen Körpers (Teppich, Tücher, Holz, Metall, Wasser). Dabei überdauert die negative Ladung der Atmosphäre im Innern des Käfigs das Spritzen selbst und verliert sich erst allmählich (wie l. c. p. 588). Stellte man eine gereinigte Messingplatte isolirt in dem Schutzkasten vertical auf, verbindet sie mit dem Electrometer und bläst aus dem Verstäuber Wasser gegen sie, so wird sie sehr stark positiv, der Lichtzeiger eilt geradezu aus der Scala hinaus bis weit jenseits derselben. Führt man den Flammencollector ein, so ergiebt sich wieder starke negative Ladung, besonders in der Richtung, in der die Luft von der Platte wegstreicht. Steht das Licht höher als diese, so zeigt das Electrometer verhältnissmässig wenig negative Bewegung (gegen 5 Daniell z. B.), bei tieferen und gleich hohen Stellungen aber des Collectors erreicht man leicht 20—30 Dan., und ist stets starke negative Ladung nachzuweisen. Auch bei horizontaler Lage der Platte, den isolirenden Griff nach unten gerichtet und Bespritzen von oben, geht die Ladung nur wenig mehr in die Höhe. Man kann die zu bespritzende Platte auch einfach am Verstäuber selbst anbringen, mit der Ausflussröhre metallisch verbunden wie in Fig. 5, wo $\alpha\beta$ ein sorgfältig gereinigtes Neusilberblech bedeutet und der eventuell eine Klemmschraube tragende Stift y die Verbindung mit dem Electrometer ermöglicht. In der Richtung $\beta\delta$ ist dann mit dem Flammencollector sehr starke negative Bewegung des Lichtzeigers erhältlich, während die positive Ladung der Platte (auch wenn für sich aufgestellt, wie zuvor die Messingscheibe) sogar mit dem Exner'schen oder einem gewöhnlichen (Beetz'schen) Goldblattelectroskope sichtbar zu machen ist, ersteres Instrument liess Divergenzen bis gegen drei Theilstiche nach jeder Seite hin eintreten (ca. 60 Volt). Den überwiegend grössten Theil des Wasserstaubes sieht man dabei in

1) Dabei ist die Messingplatte abgeleitet.

der Gegend von $\varepsilon\lambda$ (Fig. 2) im Bogen herabsinken und sich ganz deutlich von dem Luftstrome trennen.¹⁾ *Trifft nun dieser vom suspendirten Wassr möglichst befreit den Flammencollector, so zeigt das Electrometer noch immer starke negative Ladungen, der herabsinkende Nebel dagegen erscheint fast gar nicht geladen.* Stellt man nämlich den Verstäuber auf den grossen Drahtkäfig, dessen Deckel jetzt abgenommen und durch einen solchen aus Zinkblech mit passend angebrachtem Ausschnitt ersetzt worden, so kann man den Wasserstaub allein in das Innere des Schutzkastens eintreten lassen (Fig. 6). Solcher herabsinkender Nebel erregt einen möglichst hochstehenden Lichtcollector infolge Auftreffens auf den Boden, wie vorhin angegeben, nur sehr wenig, zeigte sich also eine bedeutende Bewegung des Lichtzeigers, wenn die Flamme ganz nahe dem Wasserstaube steht, so wäre dies ein Beweis für eine beträchtliche Ladung des Nebels. Davon aber fand sich durchaus nichts (etwa 1 Dan. negativ), selbst wenn das Licht bis in den Nebelstrom geschoben wurde, blieben die Ausschläge²⁾ von derselben Grösse, wie wenn man einfach energisch in den Drahtkäfig hinein auf den Boden stäubte. *Die von der Platte abprallenden sichtbaren Wasserpärtekelchen sind also, übereinstimmend mit den Angaben Hrn. Lenard's, in der That nicht die Träger der negativen Electricität, diese zieht jedenfalls so gut wie vollständig mit dem Luftstrome davon.*³⁾ Um übrigens Influenz auf den Verstäuber thunlichst zu vermeiden, wurde dieser bei dem soeben besprochenen Versuche in einem langen Blechtunnel aufgestellt, dessen Enden mit Drahtnetzen verschlossen waren.

1) Steht die Platte frei, sodass man ihre Lage zum Verstäuber beliebig ändern kann, so fand sich der beste Erfolg, wenn dieselbe ziemlich senkrecht getroffen wurde und nicht zu nahe der Ausflussmündung stand, sondern den bereits recht verbreiterten Nebelstrom auffing. Bei kleinem Abstände der Scheibe vom Verstäuber ist die Wirksamkeit sehr viel geringer, auch bei zu grossen nimmt sie ab, aber weniger auffallend, die beste Entfernung fand sich z. B. einmal 30–50 cm.

2) Brachte man dagegen bei unveränderter Stellung der Flamme den das Neusilberblech tragenden Verstäuber in den Schutzkasten hinein, ungefähr in gleicher Höhe mit jener, so eilte der Lichtzeiger aus der Scala hinaus.

3) Die Rolle, welche feinsten, vom Luftstrome eventuell stets mitgeführter Wasserstaub dabei spielt, wird allerdings durch die vorliegenden Versuche noch nicht aufgeklärt.

Durch die Maschen des einen ging der Gummischlauch des Gebläses, der andere gestattete der von dem Neusilberblech wegwehenden negativen Luft abzuziehen. Der Wasserstaub gelaugt so gut wie alle in den grossen Schutzkasten, direct abtropfendes Wasser wurde von einem untergelegten, abgeleiteten Metalldeckel aufgefangen. Lässt man das von einer angespritzten Metallscheibe absprühende und ablaufende Wasser in die isolirte grosse Wanne unter dem Schutzkasten fliessen, so erhält man nur kleine negative Ausschläge, die nach einiger Zeit abnehmen und sogar zuweilen positiv wurden, auch wenn man das ablaufende Wasser besonders in einem abgeleiteten Metalldeckel auffängt.¹⁾ (Hierbei zeigte sich erst ca. 1 Dan. negative, dann ca. 1 Dan. positive.) Diese Versuche sind indessen nicht direct entscheidend für die Abwesenheit einer negativen Ladung des Nebels, denn beim Auftreffen desselben auf die Wanne kann positive Electricität sich bilden, welche die entgegengesetzte der Wassersträuber compensiren könnte. Bei Isolirung des Deckels, welcher das ablaufende Wasser auffängt, wurden merklich positive Ausschläge erhalten (ca. 6—8 Dan.). Verbindet man daher ein nicht zu flaches metallenes Aufgefängegefäss mit der angespritzten Platte, so erhält man noch viel grössere Ladungen als sonst, man kann leicht eine ganz starke Divergenz mit positiver Electricität der Goldblättchen so erreichen, wenn dem Verstäuber eine günstige Lage ertheilt wird, auf deren Einfluss ja bereits aufmerksam gemacht worden ist. Dasselbe Resultat erhält man aber auch, wenn man einfach in ein solches mit einem Electroskop verbundenes Aufgefängegefäss kräftig hineinstäubt, wobei dieses Wasser enthalten oder auch trocken sein kann.²⁾ *Man kann sich so in sehr bequemer Weise von der Existenz der Wasserfallelectricität über-*

1) Dadurch sollte die Erregung positiver Electricität beim Fallen von Tropfen vermieden werden.

2) Da eventuell das Rosten der bei den Experimenten angewandten Metalltheile Bedenken erregen könnte, so sind die Versuche mit demselben Erfolge wie bisher kürzlich mit einem Verstäuber, dessen enges Rohr aus Silber gefertigt und dessen übrige metallene Theile versilbert, wiederholt worden, indem man in eine gereinigte Silberwanne hineinstäubte. Füllt man den Verstäuber mit etwas absolutem Alkohol und verstäubt ihn, so kann man jenen im Innern reinigen und trocknen, auch dasselbe noch mit Petroläther thun, um möglichst Fett zu entfernen.

zeugen, resp. dieselbe anderen demonstriren. Es ist aber auch möglich ohne Verstäuber gute Wirkungen zu erhalten mit einer *gläsernen Spritzflasche*¹⁾, deren zu einer feinen Spitze ausgezogenem, ebenfalls gläsernem Ausflussrohr, ein kräftiger Strahl entströmt. Nur darf man erst den in Tropfen zerfallenen Theil derselben die Scheibe treffen lassen. Dann gibt das Thomson'sche Electrometer starke positive Ladungen, ein Flammencollector ebenso negative der Atmosphäre.

Bewegt man die Spritzflasche drehend etwas hin und her, sodass die Wassertropfen bei schmalem Strahl nicht immer dieselbe Stelle treffen, so lässt sich die Wirkung noch bedeutend verstärken und leicht mit einem gewöhnlichen, resp. Exner'schen Electroskope nachweisen. Beim Stillstehen der Spritzflasche nimmt dann die Divergenz trotz fortgesetzten Austreibens des Strahles wieder ab. Noch stärkere Ladung ergiebt sich wiederum, wenn das ablaufende Wasser in einem mit der bespritzten Scheibe verbundenen Metallgefäß aufgefangen wird. Der zusammenhängende Theil des Strahles gibt selbst am Thomson'schen Electrometer keinen Effect²⁾, es wurden kaum 3 Dan. positiv bei stärkstem und anhaltenden Blasen erzielt. Uebrigens gibt auch eine recht feine, mit der Wasserleitung direct verbundene Glasspitze, wenn man den in Tropfen zerfallenen Strahl³⁾ gegen eine isolirte Metallscheibe sprühen⁴⁾ lässt, eine deutliche Divergenz am Goldblattelectroskop.) Zerstäubte der Strahl in einem ihm entgegenstehenden Hinderniss und sprühten die so gebildeten Wasserpartikelchen auf eine isolirte Metallplatte, so zeigte sich dagegen kein Auseinandergehen der Blättchen.

Stellt man einen Verstäuber isolirt auf, verbindet seine metallene Ausflussröhre mit dem Thomson electrometer und setzt ihn in Thätigkeit, so erhält man starke negative Be-

1) Dieselben Gummigebläse, welche bei den Verstäubern verwendet worden waren, dienten auch dazu, die Spritzflasche *m* in Gang zu setzen.

2) Hin- und Herbewegen war ohne Nutzen zum Erlangen bedeutender Effecte, das Goldblattelectroskop gab dabei keine Spur eines Anzeichens von Ladung.

3) Dieser war in unserem Falle von der Breite der Platte und Hin- und Herbewegung ohne merklichen Nutzen.

4) Der zusammenhängende Theil ergab nichts.

wegung des Lichtzeigers, auch wenn die Aufstellung innerhalb des Schutzkastens geschieht, äussere Influenz also nicht wirkt. Nach dem Früheren ist aber der ausgeblasene Wasserstaub ungeladen (wenigstens nahezu), es ist also bei den starken negativen Wirkungen, die hier auftreten, Influenz seitens der durch Auftreffen des Strahles auf den Boden oder sonstige feste Gegenstände erregten Electricität zu vermuthen. Diese Annahme wurde durch folgende Versuche näher begründet. Stellt man den Verstäuber, die Ausflussröhre nach unten gerichtet, sodass so gut wie aller Wasserstaub den Boden trifft und keine sonstigen Gegenstände, innerhalb des Schutzkastens einmal möglichst hoch, einmal tief auf, so erhält man im ersten Falle nur eine kleine negative Verschiebung des Lichtzeigers, eine sehr grosse aber im letzteren, obwohl die Vorgänge im Verstäuber dieselben sind in beiden Fällen. Steht dieser hoch, so kann aber nach Früherem die Influenz der beim Auftreffen auf den Boden gebildeten negativen Electricität sich fast gar nicht geltend machen, wohl aber in der tiefen Lage. Bringt man aber eine grössere Holzplatte oder dergleichen in der Nähe des Ausflussrohres passend an, so zeigt sich der Verstäuber auch in der Höhe stark negativ geladen, wenn das Auffangebrett genügend gross und geeignet angebracht ist, um ein Herabsinken der negativ geladenen Theilchen nach dem Boden hin zu vermeiden.

Es liegt nahe, die Electricität, welche bei dem Entspannen von Luft und Auftreffen des so gebildeten Nebels auf eine Metallplatte entsteht, ebenfalls als Wasserfallelectricität im Sinne des Hrn. Lenard zu erklären, soweit dieselbe positiv ist. Indessen ist wohl sicher, nicht allein diese Ursache bei den betreffenden Versuchen wirksam, denn *das Vorzeichen der entstehenden Ladung ist ja sehr abhängig von dem Zustande der getroffenen Oberfläche*, wie aus gewissen Versuchen, welche Verfasser angestellt, hervorgeht.¹⁾ Man hat es ohne Zweifel dabei auch mit Phänomenen zu thun, die der Reibung verwandt sind und die Wasserfallelectricität an Grösse überreffen können. Mit den früher benutzten Apparaten²⁾ wurden

1) Wied. Ann. 47. p. 561 u. 62. 1892.

2) Wied. Ann. 47. p. 559. 1892.

nun einige Experimente derart angestellt, dass man aus dem Compressionsgefäss unter schnellem Oeffnen des Hahnes sich entspannende feuchte Luft gegen den äusseren trockenen Rand der im Drahtkäfig stehenden Wanne richtete, und dann auch gegen das darin befindliche Wasser. Das angeblasene Metall gab positive Bewegung des Lichtzeigers am Thomson'schen Electrometer (ca. 8—10 Dan.), richtete man den Strom senkrecht gegen die Wasserfläche, so entstand auch positive Electricität, aber etwas weniger als vorhin (ca. 5 Dan.), noch viel weniger wenn die Luft möglichst der Wasseroberfläche entlang strich. Zur Bildung positiver Ladung ist also Trockenheit des getroffenen Metalles nicht erforderlich, *der Nebel gibt auch eine Wasserfläche treffend positive Electricität, was für deren Erklärung als Wasserfallelectricität spricht*, die wiederum auch hier *nicht* als durch *Reibung* von Nebel an einer Wasseroberfläche *bedingt* erscheint.

7. Ueber die Lösung des Magnetisirungsproblems durch Reihen; von A. Wassmuth.

(Aus den Sitzungsberichten der kais. Akad. der Wissenschaften in Wien. Math.-naturw. Klasse; Bd. 102. Abth. II. a. Februar 1893.)

1. Bezeichnet V das inducirende, Q das inducirte und $\varphi = V + Q$ das Gesammtpotential, so erhält man, wenn noch k die Magnetisirungszahl vorstellt, bekanntlich die Componenten des magnetischen Momentes aus:

$$A = -k \frac{d\varphi}{dx}, \quad B = -k \frac{d\varphi}{dy}, \quad C = -k \frac{d\varphi}{dz}$$

und die Oberflächendichte:

$$h = k \frac{d\varphi}{dn_i}$$

Es ist das inducirte Potential:

$$(1) \quad Q = k \int \frac{ds}{r} \frac{d(V+Q)}{dn_i},$$

wo sich die Integration auf die Oberfläche des inducirten Körpers bezieht. Die Lösung des Magnetisirungsproblems läuft also in erster Linie darauf hinaus, aus dieser gewissermaassen transcendenten Gleichung das Oberflächenpotential Q , das ausserdem gewisse wohlbekannte Eigenschaften haben muss, zu bestimmen.

Die enormen Schwierigkeiten dieser Aufgabe hatten zuerst Beer¹⁾ und dann später C. Neumann²⁾ und Riecke³⁾ darauf geführt, Q durch Reihenentwicklungen auszudrücken, die nach V und aus V gebildeten Functionen fortschreiten. Beer und C. Neumann haben hierzu die bekannte von Green gegebene Gleichung:

$$(2) \quad 4\pi V_i = \int V \frac{d}{dn_i} \frac{1}{r} ds - \int \frac{ds}{r} \frac{dV}{dn_i}$$

1) Beer, Electrostatik. p. 155—169.

2) C. Neumann, Logar. Potential. p. 248; L. Weber, Grunert's Arch. 61.

3) Riecke, Wied. Ann. 13. p. 466 et seq. 1881.

benutzt, während Riecke von der Betrachtung der Kraftströhen ausgeht. Will man nach einerlei Methode vorgehen, so ist es nützlich, das Gesamtpotential φ analog der Gleichung (2) auszudrücken und hierzu Gleichung (1) zu addiren. Es wird:

$$(3) \quad (1 + 4\pi k) Q_i + 4\pi k V_i = k \int (Q_s + V_s) \frac{d\frac{1}{r}}{dn_i} ds.$$

Geht man nun von der Gleichung (2) aus und setzt:

$$(4) \quad \int \frac{ds}{r} \frac{dV}{dn_i} = 4\pi V_1, \quad \int \frac{ds}{r} \frac{dV_1}{dn_i} = 4\pi V_2 \text{ etc.},$$

so hat man:

$$(5) \quad \begin{cases} V_i + V_1 = \frac{1}{4\pi} \int V \frac{d\frac{1}{r}}{dn_i} ds, \\ V_1 + V_2 = \frac{1}{4\pi} \int V_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dn_i} ds \text{ etc.} \end{cases}$$

Hieraus leitet man weiter ab:

$$(6) \quad \begin{cases} V + V_1 = \frac{1}{4\pi} \int V \frac{d\frac{1}{r}}{dn_i} ds, \\ V_1 + V_2 = \frac{1}{4\pi} \int V_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dn_i} ds. \end{cases}$$

$$V_1 + 2V_2 + V_3 = \frac{1}{4\pi} \int (V_1 + V_2) \frac{d\frac{1}{r}}{dn_i} ds,$$

$$V_1 + 3V_2 + 3V_3 + V_4 = \frac{1}{4\pi} \int (V_1 + 2V_2 + V_3) \frac{d\frac{1}{r}}{dn_i} ds$$

sodass also von der zweiten Gleichung an der links auftretende Theil sich unter dem Integralzeichen in der nächstfolgenden Gleichung wiederfindet.

Werden nun diese Gleichungen (6) der Reihe nach mit $1, \varrho, \varrho^2, \varrho^3 \dots$ multiplicirt und addirt, und wird zur Abkürzung:

$$(7) \quad Q_i = \varrho V_1 + \varrho^2 (V_1 + V_2) + \varrho^3 (V_1 + 2V_2 + V_3) + \dots$$

gesetzt, so folgt:

$$Q_i + \varrho V_i = \frac{\varrho}{4\pi} \int (Q + V) \frac{d}{dn_i} \frac{1}{r} ds.$$

Diese Gleichung wird vollständig identisch mit der obigen Gleichung (3), wenn man nur $\varrho = 4\pi k / (1 + 4\pi k)$ nimmt. Die Gleichung (7) stellt die von Riecke gefundene, in allen praktischen Fällen convergente¹⁾ Reihenentwicklung dar.

Multiplicirt man hingegen die Gleichungen (5) der Reihe nach mit $x, x^2, x^3 \dots$, addirt sie hierauf und wählt:

$$(8) \quad Q = x V_1 + x^2 V_2 + x^3 V_3 \dots,$$

so stösst man wiederum auf die obige Gleichung (3), sobald man $x = 4\pi k$ nimmt. Die Gleichung (8) stellt die älteste von Beer l. c. p. 159 gegebene Reihenentwicklung dar.

Um auch die von C. Neumann gegebene Entwicklung²⁾ zu finden, hat man im wesentlichen nach ihm zu setzen:

$$(9) \quad \int V \frac{d}{dn_i} \frac{1}{r} ds = 4\pi V'_i, \quad \int V' \frac{d}{dn_i} \frac{1}{r} ds = 4\pi V'' \text{ etc.}$$

sodass:

$$(10) \quad V' - V_i = \frac{1}{4\pi} \int \frac{ds}{r} \frac{dV}{dn_i}, \quad V'' - V' = \frac{1}{4\pi} \int \frac{ds}{r} \frac{dV'}{dn_i} \text{ etc.}$$

ist.

Werden diese Gleichungen der Reihe nach mit $x, x^2, x^3 \dots$ multiplicirt, addirt und wird:

$$x V + x^2 V' + x^3 V'' + \dots = 4\pi k \cdot \Phi$$

gesetzt, so folgt:

$$\Phi \cdot 4\pi k \left[\frac{1}{x} - 1 \right] - V = k \int \frac{ds}{r} \frac{d\Phi}{dn}.$$

Diese Gleichung stimmt mit (1) überein, sobald:

$$4\pi k \left[\frac{1}{x} - 1 \right] = 1, \quad \Phi = Q + V, \text{ d. i. } x = \frac{4\pi k}{1 + 4\pi k}$$

genommen wird. C. Neumann's Entwicklung lautet also:

$$(11) \quad \Phi = Q + V = \frac{1}{1 + 4\pi k} \left[V + \frac{4\pi k}{1 + 4\pi k} V' + \left(\frac{4\pi k}{1 + 4\pi k} \right)^2 V'' + \dots \right].$$

1) Riecke, Wied. Ann. 13. p. 473. 1881.

2) Vgl. Beer l. c. p. 162.

Eine vierte, wie es scheint, noch nicht veröffentlichte Reihenentwicklung erhält man, indem man sich, ähnlich wie früher, aus (10) die Gleichungen:

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} V' - V &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{ds}{r} \frac{dV}{dn}, \\ V'' - 2V' + V &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{ds}{r} \frac{d(V' - V)}{dn}, \\ V''' - 3V'' + 3V' - V &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{ds}{r} \frac{d(V'' - 2V' - V)}{dn} \text{ etc.} \end{aligned} \right.$$

ableitet, dieselben der Reihe nach mit ϱ , ϱ^2 , $\varrho^3 \dots$ multiplicirt, sie addirt und

$$V + \varrho(V' - V) + \varrho^2(V'' - 2V' + V) + \dots = \Phi$$

wählt. Man erhält so:

$$\Phi - V = \frac{\varrho}{4\pi} \int \frac{ds}{r} \frac{d\Phi}{dn_1},$$

hat also $\Phi = Q + V$, $\varrho = 4\pi k$ zu setzen.

Diese Reihe lautet:

$$(13) \quad \varphi = Q + V = V + 4\pi k(V' - V) + (4\pi k)^2[V'' - 2V' + V] + \dots$$

und hat demnach Aehnlichkeit mit der Beer'schen, in die sie thatsächlich übergeführt werden kann.

Zwischen den einzelnen aus V abgeleiteten Functionen bestehen nämlich mehrere Beziehungen. So findet man aus (5) und (9) durch allmähliches Substituiren:

$$(14a) \quad \left\{ \begin{aligned} V + V_1 &= V' \\ V_1 + V_2 &= V'' - V' \\ V_2 + V_3 &= V''' - 2V'' + V' \text{ etc.} \end{aligned} \right.$$

oder

$$(14b) \quad \left\{ \begin{aligned} V_1 &= V' - V \\ V_2 &= V'' - 2V' + V \\ V_3 &= V''' - 3V'' + 3V' - V \text{ etc.} \end{aligned} \right.$$

und ebenso aus (4) und (10):

$$(15a) \quad \begin{cases} V' - V = V_1 \\ V'' - V' = V_2 + V_1 \\ V''' - V'' = V_3 + 2V_2 + V_1 \\ \dots \end{cases}$$

$$(15b) \quad \begin{cases} V' = V_1 + V \\ V'' = V_2 + 2V_1 + V \\ V''' = V_3 + 3V_2 + 3V_1 + V \\ \dots \end{cases}$$

Man erkennt, dass die Gleichungen (5) durch (14a), (10) durch (15a), (9) durch (15b) und (14b) oder (12) durch (4) ersetzt werden können. Die vierte Reihenentwicklung (13) fällt, wie man mittels (14b) sieht, mit der Beer'schen Reihe zusammen. Desgleichen geht die Riecke'sche Reihe (7) mit Hilfe von (15a) über in:

$$Q = \varrho(V' - V) + \varrho^2(V'' - V') + \varrho^3(V''' - V'') + \dots; \quad \varrho = \frac{4\pi k}{1 + 4\pi k},$$

woraus sich die C. Neumann'sche Formel:

$$Q + V = (1 - \varrho)[V + \varrho V' + \varrho^2 V'' + \dots]$$

ohne weiteres ergibt. Man ersieht, dass man es eigentlich nur mit *zwei* Typen von Reihen zu thun hat; auf der einen Seite ist die Beer'sche und die hier als vierte bezeichnete, auf der anderen Seite die von C. Neumann, resp. Riecke¹⁾ gegebene Entwicklung. Stets ist der Grundgedanke der, Q , ausgehend von der Gleichung (2), durch eine Reihe von Oberflächenbelegungen zu erschöpfen.

II. Es ist selbstverständlich kein Zweifel, dass die im Vorhergehenden erwähnten Reihen für das Flächenpotential Q die Thomson'sche Grenzgleichung:

$$(16a) \quad (1 + 4\pi k) \frac{dQ}{dn_i} + \frac{dQ}{dn_a} = -4\pi k \frac{dV}{dn_i}$$

oder

$$(16b) \quad (1 + 4\pi k) \frac{d\varphi}{dn_i} + \frac{d\varphi}{dn_a} = 0$$

befriedigen müssen. Im Nachfolgenden sollen nun Methoden entwickelt werden, aus denen man, *ausgehend von der Thomson'schen Grenzgleichung*, unter gewissen Annahmen auf Reihen-

¹⁾ Riecke l. c. p. 480.

entwickelungen für Q geführt wird. Zu dem Ende soll sowohl V wie Q als (convergente) Reihe von Gliedern, denen gewisse, physikalisch deutbare Bedingungen vorgeschrieben werden, gedacht sein. So sei vorerst:

$$(17) \quad \begin{cases} V = (V - \alpha V_1) + \alpha (V_1 - \alpha V_2) + \alpha^2 (V_2 - \alpha V_3) + \dots \\ = U_1 + U_2 + U_3 + \dots = \sum_1^\infty U_z \end{cases}$$

eine convergente Reihe, sodass also die Bedingungsgleichung

$$\frac{dV}{dn_i} + \frac{dV}{dn_a} = \sum_1^\infty \left(\frac{dU_z}{dn_i} + \frac{dU_z}{dn_a} \right) = 0$$

jedenfalls erfüllt ist, welche Bedeutung V_1, V_2, \dots resp. U_1, U_2, \dots und die Constante α auch haben mögen.

Diesen bisher noch willkürlichen Functionen U_1, U_2, \dots werde nun die Bedingung:

$$(18) \quad \frac{dU_z}{dn_i} + \frac{dU_z}{dn_a} = -4\pi k \frac{dU_{z-1}}{dn_i}$$

in der Art vorgeschrieben, dass dieselbe für $z=1, 2, 3, \dots \infty$ gelten solle und $U_0 = -V$ (man denke 17 auf Null gebracht) genommen werde. Die Möglichkeit einer solchen Entwicklung des V in eine $\sum_1^\infty U_z$ vorausgesetzt, erscheinen dann die U_z, \dots, U_2 , die im Unendlichen verschwinden und sonst endlich und stetig sind, als Flächenpotentiale, und zwar gehört zu U_z die Dichte:

$$k \frac{dU_{z-1}}{dn_i}.$$

Setzt man in (18) der Reihe nach: $z=1, 2, \dots \infty$ und stets $U_z = \alpha^{z-1} [V_{z-1} - \alpha V_z]$, so gelangt man zu den Gleichungen:

$$\frac{dU_1}{dn_i} + \frac{dU_1}{dn_a} = +4\pi k \frac{dV}{dn_i}$$

oder

$$-\alpha \left[\frac{dV_1}{dn_i} + \frac{dV_1}{dn_a} \right] = 4\pi k \frac{dV}{dn_i},$$

und allgemein:

$$(19) \quad \frac{dV_z}{dn_i} + \frac{dV_z}{dn_a} = -\frac{4\pi k}{\alpha} \frac{dV_{z-1}}{dn_i}, \quad z=1, 2, \dots, V_0 = V.$$

Die Grössen V_1, V_2, \dots erscheinen ebenfalls als Flächenpotentiale, sind aber jetzt nicht mehr willkürlich, sondern jede kann aus der vorhergehenden und schliesslich V_1 aus V abgeleitet werden.

In ähnlicher Art sei auch:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots = \sum_1^{\infty} Q_z$$

eine convergente Reihe und Q_1, Q_z, \dots ebenso wie Q selbst Flächenpotentiale, für die die Bedingung:

$$(20) \quad \frac{d Q_z}{d n_i} + \frac{d Q_z}{d n_a} = -x^2 \frac{d V_{z-1}}{d n_i}, \quad z = 1, 2 \dots \infty$$

vorgeschrieben werde.

Nun sollen die Q_z die Thomson'sche Gleichung:

$$\sum_1^{\infty} \left[(1 + 4\pi k) \frac{d Q_z}{d n_i} + \frac{d Q_z}{d n_a} \right] = -4\pi k \frac{d V}{d n_i}$$

befriedigen, d. h. es soll wegen (20):

$$\begin{aligned} -x \frac{d V}{d n_i} - x \left[x \frac{d V_1}{d n_i} + x^2 \frac{d V_2}{d n_i} + \dots + x^z \frac{d V_z}{d n_i} + \dots \right] \\ + 4\pi k \left[\frac{d Q_1}{d n_i} + \frac{d Q_2}{d n_i} + \dots + \frac{d Q_z}{d n_i} + \dots \right] = -4\pi k \frac{d V}{d n_i} \end{aligned}$$

sein. Dividirt man durch $4\pi k$, so sieht man, dass sich als Lösung:

$$(21) \quad x = 4\pi k, \quad Q_z = x^z V_z = (4\pi k)^z \cdot V_z,$$

d. i. die Beer'sche Entwicklung:

$$Q = 4\pi k \cdot V_1 + (4\pi k)^2 \cdot V_2 + \dots$$

ergiebt. Dabei ist nun nach (19):

$$(22) \quad \frac{d V_z}{d n_i} + \frac{d V_z}{d n_a} = -\frac{d V_{z-1}}{d n_i},$$

d. h. V_z erscheint als Flächenpotential mit der Dichte:

$$(23) \quad \sigma_z = \frac{1}{4\pi} \frac{d V_{z-1}}{d n_i},$$

oder es muss

$$(24) \quad V_1 = \frac{1}{4\pi} \int \frac{ds}{r} \frac{d V}{d n_i}, \quad V_2 = \frac{1}{4\pi} \int \frac{ds}{r} \frac{d V_1}{d n_i} \text{ etc.}$$

sein; die hier gebrauchten Funktionen V_1, V_2, \dots fallen also mit den obigen (vgl. (4)) vollständig zusammen.

Die Gleichung (20) kann auch geschrieben werden:

$$(25) \quad \frac{d Q_z}{d n_i} + \frac{d Q_z}{d n_a} = -4 \pi k \frac{d Q_{z-1}}{d n_i}$$

und gibt uns eine Beziehung zwischen Q_z und Q_{z-1} , die der zwischen U_z und U_{z-1} (18) ganz analog ist. Diese Gleichung (25) gilt auch für $z = 1$, indem aus $Q_z = \pi^z V_z$, $Q_0 = V_0 = V$, $Q_1 = \pi V_1$ folgt.

U_z ist nach (18) ein Flächenpotential mit der Dichte

$$k \frac{d U_{z-1}}{d n_i}$$

und analog stellt auch Q_z ein Flächenpotential mit der Dichte

$$k \frac{d Q_{z-1}}{d n_i}$$

vor. Addirt man die Gleichungen (18) und (25) und setzt:

$$U_z + Q_z = \varphi_z,$$

so erhält man:

$$(26) \quad \frac{d \varphi_z}{d n_i} + \frac{d \varphi_z}{d n_a} = -4 \pi k \frac{d \varphi_{z-1}}{d n_i}, \quad z = 1, 2, 3 \dots \infty,$$

wobei also:

$$\varphi = \sum_1^{\infty} \varphi_z \quad \text{und} \quad \varphi_0 = U_0 + Q_0 = -V + V = 0$$

ist.

Der Theil φ_z des Gesamtpotentials φ erscheint als Flächenpotential mit der Dichte

$$h_z = k \frac{d \varphi_{z-1}}{d n_i}$$

und die schliessliche Dichte h entsteht durch Uebereinanderlagerung der Mengen mit den diesbezüglichen Dichten h_z . Es ist ja:

$$h = k \frac{d \varphi}{d n_i} = k \sum_1^{\infty} \frac{d \varphi_z}{d n_i} = k \sum_2^{\infty} \frac{d \varphi_{z-1}}{d n_i} = \sum_2^{\infty} h_z = \sum_1^{\infty} h_z$$

da $h_1 = 0$ ist.

Man erhält:

$$q_z = (4\pi k)^{z-1} V_{z-1}, \quad h_z = k \frac{d q_{z-1}}{d n_i} = k \cdot (4\pi k)^{z-2} \frac{d V_{z-2}}{d n_i}$$

und hat

$$q = V + Q = q_1 + q_2 + \dots = V + 4\pi k \cdot V_1 + (4\pi k)^2 V_2 + \dots$$

und die dazu gehörigen Oberflächendichten aus:

$$h = 0 + k \cdot \frac{d V}{d n_i} + k \cdot 4\pi k \frac{d V_1}{d n_i} + \dots$$

Das Potential q_z , entstanden durch die Belegung mit der Dichte h_z , *inducirt* selbst die nächste Dichte h_{z+1} .

III. Auf ähnlichem Wege ist es möglich, auch zur zweiten Type der Reihen, zur Riecke-Neumann'schen zu gelangen.

Das inducirende Potential V sei durch die als convergent gedachte Reihe:

$$(27) \quad V = (V - V') + (V' - V'') + \dots = U' + U'' + \dots;$$

$$U^{(z)} = V^{(z-1)} - V^{(z)}$$

ausgedrückt und den bisher noch unbekannten Functionen $V^{(z)}$ werde die Bedingung:

$$(28) \quad \frac{d [V^{(z-1)} - V^{(z)}]}{d n_i} + \frac{d [V^{(z-1)} - V^{(z)}]}{d n_a} = + \frac{d V^{(z-1)}}{d n_i}$$

die auch die Form:

$$(29) \quad \frac{d U^{(z)}}{d n_i} + \frac{d U^{(z)}}{d n_a} = \frac{d V^{(z-1)}}{d n_i} = - \left[\frac{d U^0}{d n_i} + \frac{d U'}{d n_i} + \dots + \frac{d U^{(z-1)}}{d n_i} \right]$$

erhalten kann, wenn noch $U^0 = -V$ genommen wird.

Aus (28) ersieht man, dass $V' - V$, $V'' - V'$, ... Flächenpotentiale mit den Dichten:

$$\frac{1}{4\pi} \frac{d V}{d n_i}, \quad \frac{1}{4\pi} \frac{d V'}{d n_i} \dots$$

sind.

Werden die Abkürzungen:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi} \int \frac{ds}{r} \frac{d V}{d n_i}, \quad V_2 = \frac{1}{4\pi} \int \frac{ds}{r} \frac{d V_1}{d n_i} \dots$$

— es sind also dieselben wie in (24) oder (4) — eingeführt, so folgt:

$$(30) \quad V' = V + V_1; \quad V'' = V_2 + 2V_1 + V; \quad V''' = V_3 + 3V_2 + 3V_1 + V \text{ etc.}$$

sodass durch V alle übrigen Grössen V' , $V'' \dots$ gegeben sind. Die Summation aller Gleichungen (28) liefert noch:

$$(31) \quad \sum_1^{\infty} \frac{d V^{(s-1)}}{d n_i} = 0,$$

was mit der Gleichung

$$\frac{d V}{d n_i} + \frac{d V}{d n_a} = 0$$

im Einklange steht.

Wie früher sei Q durch die convergente Reihe:

$$Q = \sum_1^{\infty} Q^{(s)}$$

ausgedrückt und sollen die Q die der (29) analoge Bedingung:

$$(32) \quad \frac{d Q^{(s)}}{d n_i} + \frac{d Q^{(s)}}{d n_a} - \varrho^s \frac{d V^{(s-1)}}{d n_i},$$

wo ϱ eine noch zu bestimmende Constante ist, erfüllen. Nun autet die Thomson'sche Grenzgleichung wegen (32):

$$4 \pi k \left[\frac{d Q'}{d n_i} + \frac{d Q''}{d n_i} + \dots \right] - \varrho \left[\frac{d V}{d n_i} + \varrho \frac{d V'}{d n_i} + \dots \right] = -4 \pi k \frac{d V}{d n_i}.$$

Werden nun hierin mit Hülfe der Gleichungen:

$$V' = V - U'; \quad V'' = V - U' - U'' \text{ etc.}$$

die Grössen V' , V'' , V''' durch die U' , U'' , $U''' \dots$ ausgedrückt und $\varrho < 1$ angenommen, so ergibt sich:

$$4 \pi k \left[\frac{d Q'}{d n_i} + \frac{d Q''}{d n_i} + \dots \right] - \frac{\varrho}{1 - \varrho} \left[\frac{d V}{d n_i} - \varrho \frac{d U'}{d n_i} - \varrho^2 \frac{d U''}{d n_i} - \dots \right] = -4 \pi k \frac{d V}{d n_i}.$$

Diese Gleichung führt zu dem Schlusse:

$$(33) \quad \frac{\varrho}{1 - \varrho} = 4 \pi k, \text{ d. i. } \varrho = \frac{4 \pi k}{1 + 4 \pi k} \text{ und } Q^{(s)} = -\varrho^s U^{(s)},$$

da $Q^{(s)}$ und $\varrho^s U^{(s)}$ als Flächenpotentiale im Unendlichen verschwinden müssen und demnach sich nicht um eine Constante unterscheiden können.

Es ist also:

$$Q = \sum_1^{\infty} Q_z = - \sum_1^{\infty} \varrho^z U^{(z)} = - \sum_1^{\infty} \varrho^z [V^{(z-1)} - V^{(z)}]$$

oder:

$$Q = -\varrho V + \varrho V' - \varrho^2 V'' + \varrho^3 V''' - \varrho^4 V^{(4)} + \varrho^5 V^{(5)} - \dots$$

und

$$(34) \quad \varphi = Q + V = (1 - \varrho) [V + \varrho V' + \varrho^2 V'' + \dots],$$

das ist aber thatsächlich wegen

$$\varrho = \frac{4\pi k}{1 + 4\pi k}, \quad 1 - \varrho = \frac{1}{1 + 4\pi k}$$

nichts anderes als die obige Gleichung (11), d. h. die C. Neumann'sche, resp. bei Einführung der $V_1 \dots$ die Riecke'sche Entwicklung.

Auch hier lassen sich Formeln entwickeln, die den Aufbau der schliesslichen Dichte aus den einzelnen Theildichten versinnlichen.

Wie man sieht, lassen sich aus der Thomson'schen Grenzzgleichung *alle* bisher bekannten Reihenentwicklungen für φ ableiten. Es kommt bei dieser Methode wesentlich darauf an, sowohl das inducirende wie das inducirte Potential (V und Q) in Summanden zu zerlegen, die als Flächenpotentiale gewisse Bedingungen ((18) und (20), (29) und (32)) erfüllen. Die Verallgemeinerung der letzteren liegt nahe, und steht zu hoffen, dass man auf diesem Wege zu neuen Entwicklungen gelangen wird, zumal man für das inducirende Potential V Reihenentwicklungen kennt.

IV. Als eine nicht uninteressante Anwendung der obigen Entwicklung in Reihen möge für einen speciellen Fall die Frage erledigt werden, inwieweit sich die Einführung des Begriffes „magnetischer Widerstand“ rechtfertigen¹⁾ lasse.

Zu dem Ende werde ein Ring (etwa aus Eisen) betrachtet, der an einer Stelle durch eine *schmale* Luftspalte, durch Schnitte, die durch die Axe gehen, unterbrochen und gleichmässig und vollständig mit Draht umwickelt sei.

1) Die folgende Ableitung wurde am 30. März 1892 im naturwiss.-med. Vereine in Innsbruck vorgetragen; veröffentlicht wurde nur das Resultat der Rechnung (vgl. e. g. Phil. Mag., December 1892). In anderer Art behandelte du Bois die Frage. du Bois, Phil. Mag., Oct. 1890 und Wied. Ann. 46. p. 493. 1892.

Wäre die Luftspalte nicht vorhanden, d. h. der Ring geschlossen, so müsste bekanntlich $Q_i = 0$, $\varphi_i = V$ sein; in unserem Falle verschwindet zwar Q_i nicht, bleibt aber immer sehr klein. Macht man von der in allen praktischen Fällen convergirenden Entwicklung von Riecke-Neumann (Gleichung (34)) Gebrauch, so ist bis auf Glieder höherer Ordnung:

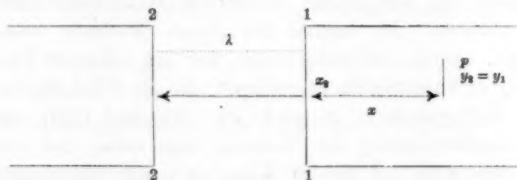
$$(41) \quad Q = -\varphi(V - V') = +\varphi V_1 = \frac{k}{1 + 4\pi k} \int \frac{ds}{r} \frac{dV}{dn_i},$$

d. h. Q erscheint als ein Oberflächenpotential mit der Dichte:

$$h = \frac{k}{K} \frac{dV}{dn_i},$$

wenn $1 + 4\pi k = K$ genommen wird.

Diese Dichte h tritt nur an den Querschnitten der Spalte auf, da sonst überall (an der Oberfläche des Eisens) ($dV/dn_i = 0$) ist,



Die Mittellinie des Ringes werde mit x bezeichnet und ihre positive Richtung falle mit der Richtung der magnetisirenden Kraft $-(dV/dx) = 4\pi ni$ zusammen, wo i die Stromstärke, n die Zahl der Windungen für die Längeneinheit vorstellt. Die Dichtigkeit auf den beiden Querschnitten sind demnach

$$h_1 = -\frac{k}{K} 4\pi ni \text{ und } h_2 = +\frac{k}{K} 4\pi ni,$$

wo h_1 zu grösserem x gehört. Hiermit wird:

$$(42) \quad Q = -\frac{k}{K} 4\pi ni [U_1 - U_2],$$

wo U_1 und U_2 Potentiale von einfachen Belegungen von der Dichte $+1$ darstellen.

Ist N die Zahl aller Kraftlinien, die durch den kreisförmig gedachten Querschnitt $A = R^2 \pi$ des Eisens gehen, so ist die magnetische Induction:

$$B = \frac{N}{A} = K \cdot \left(- \frac{d\varphi}{dx} \right)$$

oder, wegen

$$\begin{aligned} \varphi_i &= V_i + Q_i = V_i - \frac{k}{K} 4\pi n i [U_1 - U_2] \\ - \frac{d\varphi}{dx} &= + 4\pi n i + \frac{k}{K} 4\pi n i \left[\frac{dU_1}{dx} - \frac{dU_2}{dx} \right]. \end{aligned}$$

Nun ist in hinreichender Näherung das Potential U einer Kreisscheibe vom Halbmesser R und der Dichte $+1$ für einen Punkt xy , falls die x in die Axe des Kreises fallen (Mascart und Joubert, § 736),

$$U = 2\pi [f_0 + f_1 y^2],$$

wobei

$$u^2 = R^2 + x^2, \quad f_0 = u - x, \quad f_1 = -\frac{1}{4} \frac{d^2 u}{dx^2}$$

gesetzt ist und die Reihe convergirt, wenn $y < u$ ist. Werden die Coordinaten des ins Auge gefassten Punktes p im Eisen in Bezug auf den ersten Kreis mit x_1, y_1 und in Bezug auf den zweiten mit x_2, y_2 bezeichnet, so kann, da beide Belege nur auf sehr nahe Punkte im Eisen wirken, d. h. x_1 und x_2 klein bleiben, $y_2 = y_1$ und $x_2 - x_1 = \lambda$, d. i. gleich der mittleren Breite der Luftspalte gesetzt werden; es ist eben wegen der Kleinheit der Spalte erlaubt, die beiden Schnitte als zu einander parallel anzunehmen.

Man erhält so bis auf Glieder höherer Ordnung:

$$(43) \quad \frac{dU_1}{dx} - \frac{dU_2}{dx} = -\frac{2\pi\lambda}{R}$$

oder

$$- \frac{d\varphi}{dx} = 4\pi n i \left[1 - \frac{2\pi\lambda}{R} \cdot \frac{k}{K} \right] = \frac{4\pi n i}{1 + \frac{2\pi\lambda k}{R K}}.$$

Setzt man noch $n = S/l$, wo S die Zahl aller Windungen und l die ganze mittlere Länge des Ringes bezeichnet, so findet man für die Zahl N der durch den Ring gehenden Kraftlinien den Ausdruck:

$$(44) \quad N = \frac{4\pi S i}{\frac{l}{K \cdot R^2 \pi} + \frac{2\pi k l}{K^2 R} \cdot \frac{\lambda}{R^2 \pi}} = \frac{4\pi S i}{w_1 + w_2}.$$

Zu dem Widerstande des Eisens $w_1 = l/K \cdot R^2 \pi$ tritt also wirklich ein weiterer Widerstand

$$w_2 = \frac{2 \pi k}{K^2} \frac{l}{R} \cdot \frac{\lambda}{R^2 \pi}$$

hinzu; derselbe ist der Breite λ der Luftspalte direct und dem Querschnitte derselben umgekehrt proportional und hängt noch von dem Factor

$$\frac{2 \pi k}{K^2} \frac{l}{R}, \text{ der nahe } \frac{1}{K} \left(\frac{l}{2 R} \right)$$

ist, ab. Ist noch r der Radius des Ringes für die Mittellinie $l = 2 r \pi$, so wird der Widerstand der Luftspalte

$$w_2 = \frac{1}{K} \left(\frac{r \pi}{R} \right) \cdot \frac{\lambda}{R^2 \pi}.$$

Nennt man für $\lambda = 0$, d. i. für den geschlossenen Ring die magnetische Induction

$$B_0 = \frac{N_0}{R^2 \pi} = \frac{4 \pi S i}{K}$$

und B , wie oben, die für den geschlitzten Ring, so erhält man die Beziehung

$$B = B_0 \left[1 - \frac{2 \pi k}{K} \frac{\lambda}{R} \right],$$

worin $B_0 = H K$ gesetzt werden kann, falls $H = 4 \pi n i$ die magnetisirende Kraft vorstellt.

Es muss noch hervorgehoben werden, dass diese Methode mit einigen Aenderungen auch für andere Formen der Luftspalten gebraucht werden kann.

8. Zur Dispersion der ultrarothten Strahlen im Fluorit; von H. Rubens.

(Hierzu Taf. V Fig. 7–9.)

In zwei früheren Arbeiten¹⁾ habe ich eine grössere Reihe fester und flüssiger Körper auf ihre Dispersion im ultrarothten Spectralgebiet geprüft und mir dabei die Aufgabe gestellt, zu möglichst grossen Werthen der Wellenlängen zu gelangen. Das Verfahren, welches angewendet wurde, bestand im Erzeugen und Aufsuchen von Interferenzstreifen in einem Wärmespectrum, welches mit Hülfe eines Prismas aus der zu untersuchenden Substanz entworfen war. Durch Oculareinstellung auf die Streifen des sichtbaren Gebietes liessen sich die beiden Constanten²⁾ bestimmen, welche über die den Interferenzstreifen des ultrarothten Spectrums zugehörige Wellenlänge Aufschluss geben; die Lage dieser Streifen selbst wurde mit Hülfe eines Linearbolometers ermittelt.

Bei genügender Zahl und Dichte der Interferenzstreifen erwies sich die Methode als ebenso genau, wie diejenige des Hrn. Langley, und war dieser insofern noch überlegen, als sie es gestattete, bedeutend rascher zu arbeiten und hinsichtlich der angewandten Mittel, namentlich in Bezug auf die Energie der Wärmequelle, geringere Anforderungen stellte. Die erhaltenen Zahlenwerthe stimmten recht gut mit den Resultaten überein, welche die Hrn. Langley und Mouton für die Dispersion von Steinsalz und Quarz erhalten hatten, und welche das einzige damals auf diesem Gebiete vorhandene Zahlenmaterial bildeten.

Neuerdings hat nun Hr. Carvallo³⁾, ohne von meinen Untersuchungen Kenntniss zu haben, nach einem der Methode von Mouton ähnlichen Verfahren die Dispersion im Fluorit

1) H. Rubens, Wied. Ann. 45. p. 238. 1892 und H. Rubens u. B. W. Snow, Wied. Ann. 46. p. 529. 1892.

2) Die betreffenden beiden Constanten sind 1. Ordnungszahl der Streifen, 2. Dicke der die Interferenz erzeugenden dünnen Luftschicht.

3) Carvallo, Compt. rend. 116. p. 1189. 1893.

sehr sorgfältig bestimmt, ist aber nur bis zu einer Wellenlänge von $1,849\mu$ vorgedrungen. Dass er diese verhältnissmässig enge Grenze nicht zu überschreiten vermochte, war durch eine Eigenschaft seiner Methode, bei welcher die Einschaltung einer doppelbrechenden Quarzplatte in den Strahlengang erforderlich war, sowie durch die Anwendung von Sonnenlicht bedingt. Er vergleicht seine Resultate mit der Dispersionsformel von Briot, deren vier Constanten er aus seinen Messungen im Ultraroth und den Bestimmungen des Hrn. Sarasin¹⁾ im sichtbaren Spectralgebiete berechnet und findet zwischen den beobachteten und berechneten Werthen der Brechungsexponenten (n) eine nahezu vollkommene Uebereinstimmung. Ich habe in der folgenden Tabelle diese Zahlen mit den für die gleichen Wellenlängen durch Interpolation aus meinen beiden früheren Arbeiten sich ergebenden Werthen der Brechungsexponenten zusammengestellt. Die Zahlen der letzten Columnne hat Hr. Carvallo nach der Briot'schen Gleichung

$$\frac{1}{n^2} = a + b l^{-2} + c l^2 + d l^{-4}$$

berechnet, worin $l = \lambda/n$ die Wellenlänge in dem betreffenden Medium bedeutet. Für die Constanten gibt Hr. Carvallo die Werthe

$$\begin{aligned} a &= +0,490\,335 & b &= -0,000\,713\,835 \\ c &= +0,001\,584 & d &= -0,000\,000\,042 \end{aligned}$$

Tabelle I.

Wellenlänge λ	n beob. Rubens	n beob. Rubens u. Snow	n beob. Carvallo	n ber. Briot
0,777 μ	1,4309	1,4310	1,43096	1,43095
1,009 „	1,4290	1,4290	1,42904	1,42903
1,187 „	1,4280	1,4280	1,42804	1,42800
1,444 „	1,4269	1,4268	1,42676	1,42674
1,849 „	1,4249	1,4247	1,42460	1,42488

Wenn man bedenkt, dass Hrn. Carvallo's Dispersionmessungen nach einer anderen Methode und mit Hülfe der Thermosäule ausgeführt sind, wird man die Uebereinstimmung unter den Zahlen der einzelnen Beobachter eine erfreuliche

1) Sarasin, *Compt. rend.* 85. p. 1230. 1877.

nennen müssen. Die Uebereinstimmung mit den berechneten Werthen ist indessen weniger merkwürdig, da die Briot'sche Gleichung hier nur als Interpolationsformel dient.

Da meine in Gemeinschaft mit Hrn. Snow ausgeführten Dispersionsmessungen sich bei dem Fluorit bis zu weit höheren Wellenlängen erstreckten, hatte ich an der Hand dieser Zahlen ein gutes Mittel, die Briot'sche Formel zu prüfen. Dieselbe gab nun auch, bei Benutzung der von Hrn. Carvallo gegebenen Constanten bis etwa $2,7''$ mit meinen Zahlen gute Uebereinstimmung, doch zeigten sich im späteren Verlauf der Dispersionscurve Abweichungen, welche mit wachsender Wellenlänge rasch zunahmen und bereits bei $\lambda = 5''$ eine Verschiedenheit der Wellenlänge von 10 Proc. für den gleichen Brechungsindex ergaben.

Im Anfang war ich geneigt, hieraus den Schluss zu ziehen, dass die Briot'sche Formel für weitgehende Extrapolation im Ultrarothern nicht geeignet sei, sondern nur als Interpolationsformel Genügendes leiste. Doch nahm ich mir vor, um hierüber volle Sicherheit zu gewinnen, meine diesbezüglichen Messungen nach Hrn. Langley's Methode zu wiederholen, da die von mir angewendete Methode infolge der ausserordentlich starken Dispersion des Fluorits und der dadurch bedingten sehr beträchtlichen Breite des letzten Interferenzstreifens hier unter äusserst ungünstigen Bedingungen arbeitet, sodass Beobachtungsfehler von der angedeuteten Grösse immerhin möglich waren. Während nämlich bei Bestimmung der Dispersion von Steinsalz, Sylvin etc. die Breite der Interferenzstreifen meist nur wenige Minuten betrug und selbst im äussersten Ultraroth niemals $\frac{1}{2}^{\circ}$ überstieg, dehnte sich der letzte Interferenzstreifen im Wärmespectrum des Flusspaths, welcher die Dispersion von $\lambda = 4''$ bis $\lambda = 8''$ ausschliesslich bestimmt, über ein Gebiet von mehr als $2\frac{1}{2}^{\circ}$ aus. Es ist klar, dass unter diesen Umständen geringe Absorptionen im Apparat eine Verschiebung des aufzusuchenden Wärmemaximums oder Minimums herbeiführen können, welche zu beträchtlichen Fehlern Anlass gibt, umsomehr, als die Energie in diesem Gebiete äusserst gering ist, wodurch die Genauigkeit in der Messung der Ausschläge ohnedies erheblich beeinträchtigt wird. Hr. Snow und ich haben seinerzeit nicht verfehlt, auf

diese Quelle der Ungenauigkeit hinzuweisen¹⁾ und uns darauf beschränkt, in diesem Spectralgebiete die Brechungsindices auf drei Decimalen anzugeben. Eine Wiederholung der Versuche nach der Langley'schen Methode war also hier geboten.

Da meine Versuchsanordnung sowie die Art der Beobachtung in einigen Punkten von Hrn. Langley's Verfahren abweicht, möchte ich hier etwas näher darauf eingehen. Als Wärmequelle benutzte ich wieder den Linnemann'schen Zirkonbrenner (L Fig. 7), dessen Strahlen durch eine Sylvlinlinse (*l*) auf dem Spalt s_1 eines Spectrometers (*A*) zu einem reellen Bilde des Zirkonplättchens vereinigt werden. Die Objective des Spectrometers bestanden aus Fluorit, das Tischchen trug das zur Erzeugung der Diffractionsspectra dienende Beugungsgitter (*G*). Das Ocular war aus dem Beobachtungsfernrohr entfernt. Hinter diesem Instrument war ein zweites Spectrometer (*B*), welches gleichfalls mit Fluoritlinsen versehen war, derart aufgestellt, dass sich der Spalt s_2 seines Collimators in der Focalebene des ersten Spectrometers befand und aus dem Spectrum n^{ter} Ordnung eine sichtbare Linie von der Wellenlänge λ_n in sich aufnahm. Auf dem Tischchen dieses zweiten Spectralapparates befand sich das zu untersuchende Fluoritprisma (*P*) und wurde durch eine automatisch wirkende Vorrichtung stets auf Minimum der Ablenkung gehalten. Das Ocular des Beobachtungsfernrohres war durch ein Linearbolometer (*b*) ersetzt. Am Theilkreis des Instrumentes waren Ablesungen bis auf 1" möglich; doch habe ich mich in Anbetracht der weit geringeren Genauigkeit der übrigen Messungen auf die Angabe von halben Minuten beschränkt. Das Bolometer, dessen Belichtungswiderstand aus drei hintereinander geschalteten parallelen Eisenstreifen von 0,18 mm Breite bestand, ist das nämliche, welches schon bei mehreren Untersuchungen gute Dienste geleistet hat. Es ist in meiner ersten Dispersionsarbeit als Bolometer No. 1 bezeichnet und ausführlich beschrieben worden.²⁾ Bei einer absoluten Breite von 0.6 mm nahm es im Spectrum einen Raum

1) l. c. p. 540.

2) l. c. p. 242 und 243.

von ca. $7\frac{1}{2}$ Minuten ein; die theoretische Temperaturempfindlichkeit war meist 1.5×10^{-5} Celsiusgrad pro Millimeter Ausschlag. Als Galvanometer diente zu diesen Versuchen ein Instrument der von Hrn. du Bois und mir kürzlich beschriebene Form.¹⁾

Für Messungen im Wärmespectrum eignen sich bekanntlich nur solche Diffractionsmitter, deren Constante einen ziemlich hohen Werth besitzt. Auch darf, wenn man im durchgehenden Licht untersuchen will, ein derartiges Gitter nicht auf einer Platte aus Glas oder einem anderen adiathermanen Stoff befestigt sein. Schliesslich ist grosse Regelmässigkeit der Intervalle ein Haupterforderniss, wenn man weit in das Gebiet der langen Wellen eindringen will. Diese Bedingungen fanden sich bei der von Hrn. du Bois und mir zu Polarisationsmessungen benutzten Metalldrahtgittern²⁾ in befriedigender Weise erfüllt. Eine genaue Beschreibung der Anfertigungsweise dieser Gitter findet sich in der zweiten der citirten Abhandlungen und ich will daher hier nur erwähnen, dass durch die Art der Herstellung diese Gitter die Eigenschaft erhalten, dass die Breite des freien Zwischenraumes zwischen zwei benachbarten Drähten genau gleich dem Durchmesser des Drahtes also gleich der halben Gitterconstanten wird. Es gilt aber für Gitter, welche die Bedingung erfüllen, der Satz, dass sämtliche Gitterspectra gerader Ordnungszahl ausfallen und nur die Spectra 1., 3., 5. . . $(2N - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung eine von Null verschiedene Intensität besitzen. Dies gilt selbstverständlich nur, wenn die Gitterebene zum Strahlengang senkrecht steht; doch sind bei den nachfolgenden Versuchen die Gitter in keiner anderen Stellung benutzt worden. Ueber die Vertheilung der Energie auf die einzelnen Spectra giebt das folgende Schema Aufschluss. Die Intensität der auffallenden Strahlung ist dabei gleich 1 angenommen.

Sp. 5. Ordn.	Sp. 3. Ordn.	Sp. 1. Ordn.	Haupt- bild.	Sp. 1. Ordn.	Sp. 3. Ordn.	Sp. 5. Ordn.
$\frac{1}{25 \pi^2}$	$\frac{1}{9 \pi^2}$	$\frac{1}{\pi^2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{\pi^2}$	$\frac{1}{9 \pi^2}$	$\frac{1}{25 \pi^2}$

1) H. du Bois u. H. Rubens, Wied. Ann. 48. p. 236. 1893.

2) H. du Bois u. H. Rubens, Wied. Ann. 49. p. 594. 1893;
Naturwissensch. Rundsch. VIII. Jahrg. Nr. 36. 1893.

Die Zahlen sind so angegeben, wie sie sich aus der Diffractionstheorie ergeben und nur in erster Annäherung richtig, wie wir a. a. O. für das Hauptbild nachwiesen. Zu den definitiven Messungen wurden zwei Gitter verwendet, welche sich von den übrigen durch besondere Regelmässigkeit auszeichneten. Das eine (*a*) war aus Golddraht von 0.0331 mm Durchmesser gefertigt; seine Constante betrug somit 0.0662 mm. Es ist in der citirten Abhandlung von Hrn. du Bois und mir als *Au*₁ bezeichnet und seine vorzügliche Regelmässigkeit bereits an jener Stelle hervorgehoben worden.¹⁾ Es gab noch im Spectrum 15. Ordnung genügend scharfe Linien, um zur Bestimmung der Wellenlänge ausreichend gute optische Einstellungen vornehmen zu können. Das zweite Gitter (*b*), vormals als *Cu*₁ bezeichnet, bestand aus 0.0250 mm dicken Kupferdrähten und leistete im Spectrum 13. Ordnung in optischer Hinsicht ungefähr das Gleiche, wie *a* in demjenigen 15. Ordnung.

Bevor ich nun zur Beschreibung der Versuche übergehe, möchte ich nicht verfehlen, Hrn. Dr. H. Lehmann, welcher mir bei der Ausführung derselben in liebenswürdigster Weise behülflich war, an dieser Stelle meinen besten Dank auszusprechen.

Jeder einzelne Versuch, durch welchen ein Punkt der Dispensionscurve festgelegt werden soll, zerfällt naturgemäss in zwei getrennte Messungen; es ist einmal mit Hülfe des Bolometers die Lage der durch den Spalt *s*₂ gelangenden, dem Beugungsspectrum erster Ordnung angehörenden ultrarothern Linie im Dispersionsspectrum fest zu stellen und man hat ferner die diesem Energiestreifen zugehörige Wellenlänge auf optischem Wege zu ermitteln. Die Art und Weise, wie diese beiden Bestimmungen vorgenommen wurden, soll an einem Beispiel gezeigt werden. Wir beginnen mit der Wellenlängenmessung.

Auf den Spalt des Spectrometers *B* fiel, wie man von aussen erkennen konnte, ein rother Streifen des Spectrums 7. Ordnung, ein grüner des Spectrums 9. Ordnung, ein blauer des Spectrums 11. Ordnung. Das Prisma *B* war im sicht-

1) l. c. p. 602.

baren Gebiet auf Wellenlängen geachtet; man konnte daher durch Oculareinstellung die Wellenlänge dieser Farbenstreifen, welche ziemlich scharfe Ränder zeigten, genau bestimmen. Man erhielt die Ablenkung:

für den rothen Streifen $\alpha = 31^\circ 30\frac{1}{2}'$

„ „ grünen „ $\alpha = 31^\circ 49\frac{1}{2}'$

„ „ blauen „ $\alpha = 32^\circ 11'$

Die zugehörigen Wellenlängen waren:

für den rothen Streifen $\lambda_7 = 0,648^\mu$

„ „ grünen „ $\lambda_9 = 0,502^\mu$

„ „ blauen „ $\lambda_{11} = 0,411^\mu$

Die Wellenlänge des ultrarother Streifens aus dem Spectrum 1. Ordnung, dessen Lage bolometrisch aufgesucht werden soll berechnet sich hieraus:

$$\lambda_1 = 7 \times 0,648^\mu = 4,536^\mu$$

$$\lambda_1 = 9 \times 0,502^\mu = 4,518^\mu$$

$$\lambda_1 = 11 \times 0,311^\mu = 4,521^\mu$$

$$\lambda_1 = 4,52^\mu$$

Es wurde nun das ultrarother Spectrum in der Weise durchsucht, dass man, etwa $\frac{1}{2}^\circ$ vor der vermutheten Lage des Energiestreifens beginnend in Intervallen von 5 zu 5 Minuten die Energie durch eine Anzahl von Galvanometerausschlägen (J) bestimmte. Im vorliegenden Falle ergab sich Folgendes:

Ablenkung α	Ausschlag J
$29^\circ 34'$	0,5 mm
$29^\circ 29'$	1,0 „
$29^\circ 24'$	4,5 „
$29^\circ 19'$	14,0 „
$29^\circ 14'$	20,0 „
$29^\circ 9'$	17,0 „
$29^\circ 4'$	10,0 „
$28^\circ 59'$	2,0 „
$28^\circ 54'$	0,75 „

Fig. 8 gibt eine graphische Darstellung dieser Energievertheilung. Die Construction der Schwerlinie dieser Kurve liefert eine Gerade, welche der Ordinatenaxe nahezu parallel ist und die Curve bei $\alpha = 29^\circ 13'$ schneidet. Mit Hülfe des

brechenden Winkels des Fluoritprismas, welcher gleich $60^{\circ}0'$ gefunden wurde, ergibt sich heraus der zur Wellenlänge $4,52^{\mu}$ gehörige Brechungsindex $n = 1,4045$.

In dieser Weise wurden an 18 verschiedenen Stellen des ultrarothern Spectrums Messungen von Brechungsexponenten und Wellenlängen vorgenommen¹⁾; und zwar wurde bei $\lambda = 1,98^{\mu}$ begonnen und in ziemlich gleichen Intervallen mit wachsender Wellenlänge fortgeschritten. Da die ersten Bestimmungen sich vollkommen meinen früheren Messungen anschlossen, habe ich es unterlassen, für kleinere Wellen als $\lambda = 1,98^{\mu}$ Brechungsexponenten nach der Methode von Langley zu bestimmen, sondern der Richtigkeit meiner früheren Messungen vertraut, welche ja auch durch die Uebereinstimmung mit den Resultaten des Hrn. Carvallo genügend bestätigt sind. Es kommt noch hinzu, dass in diesem Spectralgebiet, in welchem die Interferenzstreifen in Intervallen von wenigen Minuten auf einander folgen, die früher angewandte Methode sicherer und genauer arbeitet als die Langley'sche.

Mit den vorhandenen Mitteln ist es mir nicht gelungen, in den Dispersionsmessungen weiter zu gelangen als bis $\lambda = 6,48^{\mu}$ und zwar waren es besonders drei Umstände, welche einer Fortsetzung der Versuche über diese Grenze hinaus hindernd in den Weg traten. Einmal war die Strahlungsenergie des Zirconbrenners bei diesen Wellenlängen bereits sehr gering, so dass trotz ziemlich beträchtlicher Breite der beiden Collimatorspalte s_1 und s_2 (bis ca. 1 mm) die maximalen Galvanometerausschläge nur noch 8 mm betrugen, was einer Erwärmung des Belichtungswiderstandes von ungefähr $\frac{1}{10000}$ Celsius-

1) Meist wurden die linken Beugungsbilder benutzt; doch sind auch einige Punktpaare mit Hülfe der rechten Beugungsspectren bestimmt worden. Ferner wurde in einigen Fällen die Methode in der Weise abgeändert, dass man durch Verdampfen eines Glasstabes in der Knallgasflamme den Spalt s_1 mit reinem Natriumlicht beleuchtete und nun den Spalt s_2 auf das Beugungsbild n^{ter} Ordnung einstellte. Es entsprach nunmehr der im ultrarothern, nach Vertauschung des Glasstabes gegen das Zirkonblättchen, aufzusuchende Energiestreifen einer Wellenlänge $\lambda = 589 n$. Nach dieser Methode ist z. B. der Punkt

$$\lambda = 6,48^{\mu} (= 11 \cdot 0,589^{\mu}), \quad n = 1,3798$$

bestimmt; doch erwies sich die oben beschriebene Art der Wellenlängenmessung im allgemeinen als genauer.

grad entspricht. Ferner begannen die Farbstreifen, deren Lage zur Bestimmung der Wellenlänge der ultrarother Linie durch Oculareinstellung gemessen werden musste, bereits in Folge der hohen Ordnungszahl der Spectra, denen sie angehörten und in welchen sich die Fehler des Gitters in erhöhtem Maasse bemerkbar machten, wesentlich unschärfer zu werden. Ein drittes Hindernis war die mit wachsender Wellenlänge immer mehr hervortretende mangelnde Achromasie der Fluoritlinsen. Da es wegen der optischen Ablesungen nöthig war, im sichtbaren Gebiet scharfe Bilder zu haben, musste bei der Aufsuchung des ultrarother Energiestreifens das mit dem Bolometerocular versehene Beobachtungsfernrohr durch Auszug des Tubus mittelst Trieb verlängert werden, um im Ultrarothern gleichfalls eine scharfe Linie zu erhalten. Diese Manipulation wurde in einer Reihe von Fällen ausgeführt; es zeigte sich jedoch, dass die Energiecurven hierdurch zwar steiler wurden, dass hingegen die Lage des Maximums, beziehungsweise der Schwerlinie vor und nach dem Tubusauszug innerhalb der Grenzen der Versuchsfehler dieselbe war. Es wurde daher der Tubusauszug meist nur für Wellenlängen, welche $4,5\mu$ überschritten in Anwendung gebracht. In diesem Falle wurde auch der Collimator des Spectrometers *A* um ein entsprechendes Stück verlängert. Hierdurch erhielt man zwar ein leichter bestimmbares Wärmemaximum, doch wurden gleichzeitig die Fehler in der Messung der Wellenlänge vergrößert.

Die Fehler bei der Bestimmung des Energiemaximums überschritten bis $\lambda = 4\mu$ und auch späterhin in den meisten Fällen nicht den Betrag von einer Minute. Nur bei $\lambda = 5,70\mu$ scheint der Fehler beträchtlich grösser zu sein; doch hat sich hierfür kein genügender Grund auffinden lassen. Die Bestimmung der Wellenlänge ist als auf $\frac{1}{2}$ Proc. richtig anzusehen.

In der folgenden Tabelle II sind nun diese sämmtlichen Beobachtungen in Gemeinschaft mit meinen früheren Resultaten, so weit diese ohne Benutzung des letzten Interferenzstreifens erhalten sind, den aus der Briot'schen Formel mittelst der von Hrn. Carvallo gegebenen Constanten berechneten theoretischen Werthen gegenüberstellt. Die erste Spalte, welche als Ueberschrift die Marke *M* trägt, charakterisirt die Methode, welche der betreffenden Bestimmung zu Grund liegt und zwar

Tabelle II.)

<i>M</i>	λ	α	n beob.	n ber.	$\delta \cdot 10^4$	<i>M</i>	λ	α	n beob.	n ber.	$\delta \cdot 10^4$
<i>H_γ</i>	0,434 μ	32° 5'	1,4396	1,4395	+ 3	<i>a_g</i>	2,69 μ	30° 30½'	1,4205	1,4201	+ 4
<i>F_γ</i>	0,485 "	31° 52'	1,4372	1,4371	+ 1	<i>II_b</i>	2,93 "	30° 19'	1,4182	1,4185	- 3
<i>D</i>	0,589 "	31° 36'	1,4340	1,4339	+ 1	<i>b_g</i>	3,22 "	30° 14½'	1,4174	1,4185	+ 9
<i>C</i>	0,656 "	31° 29'	1,4325	1,4326	- 1	<i>II_a</i>	3,22 "	30° 10½'	1,4166	1,4165	+ 1
<i>a₁</i>	0,807 μ	31° 20½'	1,4307	1,4306	+ 1	<i>II_b</i>	3,56 "	29° 56½'	1,4135	1,4137	- 2
<i>b₁</i>	0,850 "	31° 18½'	1,4303	1,4302	+ 1	<i>II_a</i>	3,70 "	29° 52'	1,4126	1,4127	- 1
<i>a₂</i>	0,896 "	31° 16'	1,4299	1,4298	+ 1	<i>II_a</i>	3,92 "	29° 43'	1,4107	1,4107	0
<i>b₂</i>	0,950 "	31° 13½'	1,4294	1,4294	0	<i>II_b</i>	4,10 "	29° 36'	1,4093	1,4091	+ 2
<i>a₃</i>	1,009 "	31° 12'	1,4290	1,4290	0	<i>II_a</i>	4,28 "	29° 24½'	1,4069	1,4073	- 4
<i>b₃</i>	1,076 "	31° 10'	1,4286	1,4286	0	<i>II_b</i>	4,52 "	29° 13'	1,4045	1,4047	- 2
<i>a₄</i>	1,152 "	31° 7½'	1,4281	1,4282	- 1	<i>II_a</i>	4,71 "	29° 4½'	1,4027	1,4028	- 1
<i>b₄</i>	1,240 "	31° 5½'	1,4277	1,4277	0	<i>II_b</i>	4,94 "	28° 51'	1,4000	1,4008	- 3
<i>a₅</i>	1,345 "	31° 3½'	1,4272	1,4272	0	<i>II_a</i>	5,18 "	28° 37'	1,3970	1,3975	- 5
<i>b₅</i>	1,466 "	31° ½'	1,4267	1,4266	+ 1	<i>II_b</i>	5,52 "	28° 18'	1,3931	1,3932	- 1
<i>a₆</i>	1,613 "	30° 57'	1,4260	1,4260	0	<i>II_a</i>	5,70 "	28° 12'	1,3918	1,3909	+ 9
<i>b₆</i>	1,792 "	30° 52½'	1,4250	1,4251	- 1	<i>II_b</i>	6,02 "	27° 44'	1,3860	1,3865	- 5
<i>II_a</i>	1,981 "	30° 46½'	1,4241	1,4242	- 1	<i>II_a</i>	6,48 "	27° 15'	1,3798	1,3798	0
<i>a₇</i>	2,02 "	30° 46'	1,4240	1,4240	—	extrapoliert nach Briot's Formel	7,00 μ	26° 35'	—	1,3715	—
<i>b₇</i>	2,30 "	30° 39½'	1,4234	1,4235	- 1		8,00 "	25° 12'	—	1,3538	—
<i>II_b</i>	2,48 "	30° 34'	1,4212	1,4214	- 2		9,00 "	23° 37'	—	1,3383	—
<i>II_a</i>	2,66 "	30° 28'	1,4200	1,4203	- 3		10,00 "	20° 43'	—	1,2951	—

1) In der Tabelle IV meiner in Gemeinschaft mit Hrn. Snow publicirten Untersuchung sind durch ein Versehen für eine Reihe von Wellenlängen die Ablenkungen α um 1½' zu klein angegeben; die Brechungsindizes und Wellenlängen hingegen richtig. Hrn. F. Paschen, welcher mich hierauf zuerst aufmerksam machte, bin ich dafür zu Dank verpflichtet.

bedeuten die Buchstaben a, b , dass die entsprechenden Punkte aus meiner früheren Untersuchung als Minima (a) resp. Maxima (b) des n^{ten} Interferenzstreifens übernommen sind, die Zeichen Π_a resp. Π_b besagen, dass der entsprechende Punkt neuerdings nach der Methode von Langley mit Hülfe des Goldgitters (a) resp. Kupfergitters (b) erhalten worden ist.

In Fig. 9, welche eine graphische Darstellung der Tabelle II ist, sind die Punkte a, u, b durch kleine Kreise \circ , die Punkte Π_a durch Kreuze $+$, die Punkte Π_b durch $*$ wiedergegeben. Die gezeichnete glatte Curve ist durch die nach der Briot'schen Formel berechneten Werthe gelegt.

Man bemerkt zunächst, dass die neuen Messungen gut an die alten anschliessen, dass jedoch die ältere Bestimmung bei $\lambda = 3,22\mu$ (b_3) bereits merklich fehlerhaft ist und einen zu grossen Brechungsexponenten ergibt. In demselben Sinne würden auch die mit Hülfe des letzten Interferenzstreifens erhaltenen Werthe abweichen.¹⁾

Die Tabelle II und in noch auffallenderer Weise die Curve der Fig. 9 zeigen ferner die merkwürdige Thatsache, dass auf dem ganzen untersuchten Gebiet die beobachteten und berechneten Werthe der Brechungsexponenten nahezu vollkommen zusammenfallen. Trotz des enormen Bereichs der Extrapolation schliesst sich die Briot'sche Dispersionsformel bei $\lambda = 6,5\mu$ noch ebenso streng den Beobachtungen an wie im sichtbaren Spectrum und ersten Ultraroth. Wenn man ferner bedenkt, dass das Gültigkeitsbereich dieser Formel sich noch auf die Ergebnisse der Dispersionsmessungen im äussersten ultravioletten Spectrum erstreckt, wie Hr. Ketteler¹⁾ nachgewiesen hat, so glaube ich, dass man dieselbe unbedenklich

1) Ketteler, Wied. Ann. 30. p. 299. 1887. In einer zweiten Abhandlung (Wied. Ann. 46. p. 542. 1892) bespricht Hr. Ketteler auch meine Messungen im Wärmespectrum des Flussspath und erwähnt, dass die Constante k seine Dispersionsgleichung

$$n^2 = -k\lambda^2 + a^2 + \frac{M}{\lambda^2} + \frac{N}{\lambda^4}$$

gleich ca. 0,003 (nicht 0,0003, wie wohl nur durch ein Versehen gedruckt ist) gesetzt werden müsse, um Uebereinstimmung mit meinen Beobachtungen zu erzielen. Der genaue Werth ist nach meinen jetzigen Messungen $k = 0,00329$.

bis zu dem Beginn des Absorptionsgebietes wird extrapoliren dürfen. Da man nun ohne Schwierigkeit bei Anwendung starker Energiequellen in einem durch Fluoritprismen entworfenen Energiespectrum bis zu Minimalablenkungen von 23° merkliche Energie nachweisen kann, so ist zu vermuthen, dass das Absorptionsgebiet des Fluorit erst bei Wellen beginnt, welche eine Länge von 9μ überschreiten. Auch die Messungen des Hrn. W. H. Julius¹⁾ auf diesem Gebiet lassen das Gleiche vermuthen. Ich habe daher die Brechungsexponenten und Minimalablenkungen für $\lambda = 7\mu$, 8μ , 9μ und 10μ mit Hülfe der Briot'schen Gleichung berechnet und am Schluss der Tabelle den beobachteten Zahlen angefügt. Können auch die so erhaltenen Werthe nicht als unbedingt zuverlässig gelten, so ruht doch die angewendete Extrapolation zweifellos auf einer festeren Grundlage als die bisher übliche geradlinige Verlängerung der Dispersionscurve des Steinsalzes, ein Extrapolationsverfahren, welches, wie ich früher in Gemeinschaft mit Hrn. Snow nachgewiesen habe, bereits in dem Gebiet zwischen $\lambda = 5\mu$ bis $\lambda = 8\mu$ zu unrichtigen Schlüssen führt.

Nachtrag.

Hr. F. Paschen hat in einer kürzlich erschienenen Arbeit²⁾ den Nachweis geliefert, dass die in der Atmosphäre enthaltenen Mengen von Kohlensäure und Wasserdampf ausreichen, um merkliche Absorptionsstreifen im Energiespectrum eines strahlenden Körpers hervorzubringen, auch wenn die Strahlen nur relativ geringe Luftstrecken zu durchdringen haben. Es ist nicht unwahrscheinlich, dass dieser Umstand die wesentliche Ursache der Abweichungen meiner älteren Dispersionsbestimmungen gegenüber den neueren bildet, umsomehr, als die letzten Interferenzminima, wie Hr. Paschen bereits gezeigt hat, nahezu mit Absorptionsmaximis von CO_2 und H_2O zusammenfallen.

In der gleichen Publication kritisirt Hr. Paschen das von mir früher³⁾ angegebene Verfahren, in dem von Inter-

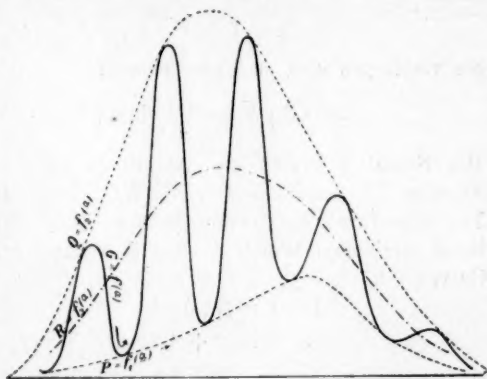
1) W. H. Julius, Verh. d. kgl. Akad. zu Amsterdam. 1. (1) 1892.

2) F. Paschen, Wied. Ann. 51. p. 1. 1894.

3) H. Rubens, Wied. Ann. 45. p. 250. 1892.

ferenzstreifen durchzogenen Energiespectrum die Lage der charakteristischen Punkte, deren Wellenlänge $\lambda = K/m$, bez. $= K/m + \frac{1}{2} \lambda$ ist, zu bestimmen. Es geschah dies in der Weise, dass man die Curve der mittleren Energie R construirte, deren Ordinaten das arithmetische Mittel der umhüllenden P und Q sind und diejenigen Punkte der beobachteten Energiecurve G als die charakteristischen ansah, in welchen die Curve G mit dem senkrecht darüber, bez. darunter befindlichen Curvenelement von R gleiche Richtung hat.

Dieses Verfahren ist, wie ich später in der mit Hrn. Snow²⁾ publicirten Arbeit betont habe, nicht streng, liefert aber in allen Fällen der Praxis hinreichend genaue Resultate. Insbesondere ist die Annäherung eine sehr gute, wenn die umhüllenden Curven P und Q nahezu den gleichen Verlauf zeigen, d.h. wenn ihre Ordinaten an allen Stellen ungefähr in demselben festen Verhältniss zu einander stehen.



Statt der Anwendung dieses ziemlich complicirten Verfahrens haben Hr. Snow und ich die Berührungspunkte der Energiecurve G mit den Umhüllenden P und Q ohne weiteres als die charakteristischen Punkte angesehen. Es lässt sich leicht zeigen, dass diese Methode nicht nur, wie die früher angewendete, gute Annäherung liefert, sondern sogar theoretisch vollkommen correct ist.

Die Curve $P = f_1(\alpha)$ gibt uns die an den verschiedenen

1) m = Ordnungszahl des Streifens, $K = 2d \cos i$ = doppeltes Product aus der Dicke der reflectirenden Luftschicht in den Cosinus des Einfallswinkels der Strahlen.

2) Snow, Wied. Ann. 46. p. 532. 1892.

Stellen des Spectrums vorhandene parasitische Energie, die theils von diffuser Strahlung, theils von der Unreinheit des Spectrums herrührt und welche an der Interferenz nicht theilnimmt. Hierüber lagert sich ein Energiespectrum, welches von den beiden interferirenden Strahlenbüscheln herrührt, welche von der Vorder- resp. Rückfläche der dünnen Luftschicht reflectirt werden. Bezeichnet $S = F(\alpha)$ die Energievertheilung innerhalb eines dieser beiden Strahlenbüschel, und ist $K = 2d \cdot \cos i$ ihr Gangunterschied, so können wir dieselben charakterisiren durch die Gleichungen

$$y_1 = \sqrt{S} \sin 2\pi \frac{t}{T} \quad 1)$$

$$y_2 = \sqrt{S} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{K}{\lambda} \right).$$

Sie vereinigen sich zu einem Strahl:

$$y = 2\sqrt{S} \cos \frac{\pi K}{\lambda} \sin \pi \left(2\frac{t}{T} - \frac{K}{\lambda} \right).$$

Der Strahl y besitzt die Amplitude $2\sqrt{S} \cdot \cos \pi K/\lambda$, seine Energie ist somit $= 4S \cos^2 \pi K/\lambda$, und diese nimmt für $\lambda = K/m$ ihren maximalen Betrag, $4S$, für $\lambda = K/m + \frac{1}{2}$ ihren minimalen Werth 0 an. Betrachten wir nun die drei Curven:

1. $P = f_1(\alpha)$
2. $G = P + 4S \cos^2 \frac{\pi K}{\lambda} = f(\alpha)$
3. $Q = P + 4S = f_2(\alpha),$

so zeigt es sich, dass die beobachtete Energiecurve $G = f(\alpha)$ mit den Curven $P = f_1(\alpha)$ resp. $Q = P + 4S = f_2(\alpha)$ diejenigen Punkte gemein hat, für welche $\lambda = K/m + \frac{1}{2}$ resp. $\lambda = K/m$ ist. An allen übrigen Stellen ist G grösser als P , resp. kleiner als Q . — P ist mithin die untere, Q die obere Umhüllende und beide berühren die Energiecurve G in den gesuchten charakteristischen Punkten.

1) Streng genommen dürfen die Amplituden der an der Vorder- bez. Rückfläche der Luftschicht reflectirten Strahlen nicht als gleich angenommen werden, weil in einem Falle der Grenzübergang Fluorit — Luft, im andern Luft — Crown Glas maassgebend ist und die Brechungsindices von Fluorit und Crown Glas verschieden sind, doch wird hierdurch an der Schlussweise nichts geändert, da man sich den Ueberschuss des stärkeren Strahls als in der parasitischen Energiemenge P enthalten denken kann.

Es scheint, dass diese von Hrn. Snow und mir beschriebene einfache und correcte Methode zur Aufsuchung der charakteristischen Punkte Hrn. Paschen entgangen ist, denn es ist evident, dass das von ihm zu Absorptionsmessungen benutzte und in diesem speciellen Falle auch theoretisch richtige Verfahren gegenüber dem unserigen für den vorliegenden Fall des von Interferenzstreifen durchzogenen Energiespectrums keine Vorzüge, aber verschiedene Nachtheile besitzt. Es ist umständlicher, denn es macht die Zeichnung der Curve *R* der mittleren Energie, sowie eine besondere Tangentenconstruction erforderlich und es ist weniger correct, denn es setzt voraus, dass die Curven *P* und *Q* an allen Stellen das gleiche Ordinatenverhältniss besitzen, eine Annahme, die zweifellos nur angenähert richtig ist.

9. Neues Actinometer; von O. Chwolson.

Hr. K. Ångström¹⁾ hat eine neue actinometrische Methode angegeben, welche auf folgendem Satze beruht: Zwei möglichst identische Körper mögen in einem gegebenen Augenblick eine Temperaturdifferenz Θ besitzen; der wärmere werde im Schatten sich selbst überlassen, der kühlere den Sonnenstrahlen ausgesetzt und es werde die Zeit t (in Minuten) gemessen, während welcher die anfängliche Temperaturdifferenz Θ sich, ihrem absoluten Werthe nach, wiederherstellt, d. h. ihr Zeichen wechselt. In diesem Falle kann die Wärmemenge q (in Gr.-Calorien), welche in der Minute von einem zu den Strahlen senkrechten Quadratcentimeter Oberfläche absorbiert wird, durch die angenäherte Formel

$$(1) \quad q = \frac{2c\Theta}{st}$$

gefunden werden, wo c die Wärmecapacität eines der beiden Körper und s der Querschnitt des absorbirten Strahlenbündels bedeutet. Ich habe diese Methode theoretisch und experimentell untersucht²⁾ und unter Anderem gezeigt, wie das Correctionsglied der Formel (1) aus den Beobachtungen bestimmt werden kann; dies Glied kann unter Umständen 3—4 Proc. betragen. Ich habe ferner ein zu relativen Messungen der Sonnenstrahlung bestimmtes Actinometer construirt, dessen Theorie sich aber wesentlich von der K. Ångström'schen unterscheidet. Die der Construction des neuen Actinometers zu Grunde liegende Methode habe ich die „Methode der Gleichen Zeiten“ genannt. Dieselbe besteht in der Beobachtung der in gleichen Zeiten entstehenden Aenderung der Temperaturdifferenz Θ zweier Körper, von denen der am Anfang

1) K. Ångström, Nova Acta Reg. Soc. Scient. Upsal. (3). 13. 1887; Bihang Till K. Svenska Vet.-Akad. Handl. 15. Afd. 1 Nr. 10; Wied. Ann. 39. p. 294. 1890.

2) O. Chwolson, Actinometrische Untersuchungen zur Construction eines Pyrheliometers und eines Actinometers, Repertorium für Meteorologie. 16. Nr. 5. p. 6—24 und 37—130.

der Beobachtung wärmere sich im Schatten, der am Anfang kältere sich in der Sonne befindet.

Es sei zur Zeit Null die T.-D. (Temperaturdifferenz) gleich Θ_1 , zur Zeit t gleich Θ_2 und zur Zeit $2t$ gleich $-\Theta_3$, wo Θ_3 eine positive Grösse ist. Wir stellen also die Bedingung, dass die T.-D. während der Beobachtung ihr Zeichen wechselt; ausserdem soll Θ_2 eine kleine positive oder negative Grösse sein und etwa $0,24$ nicht übersteigen. Bezeichnen wir die ganze Oberfläche des Körpers mit S , den mittleren äusseren Wärmeleitungscoefficienten mit h und setzen wir $hS/c = m$ (Abkühlungscoefficient) und $qs/hS = T$ (stationäre Temperatur bei unbeschränkter Gültigkeit des Newton'schen Gesetzes), so ist

$$(2) \quad q = \frac{c}{s} m T.$$

Nun sind $\varphi = \varphi_0 e^{-mt}$ und $\psi = \psi_0 e^{-mt} + T(1 - e^{-mt})$ die variablen Temperaturen der beiden Körper. Hieraus $\Theta_2 = \Theta_1 e^{-mt} - T(1 - e^{-mt})$ und $-\Theta_3 = \Theta_1 e^{-2mt} - T(1 - e^{-2mt})$. Entnimmt man diesen Gleichungen m und T , so gibt (2)

$$(3) \quad q = \frac{c}{s} \cdot \frac{1}{t} \frac{\Theta_1 \Theta_2 + \Theta_2^2}{\Theta_1 - 2\Theta_2 - \Theta_3} \log \frac{\Theta_1 - \Theta_2}{\Theta_2 + \Theta_3}.$$

Zerlegt man den Logarithmus mit Hülfe der Formel

$$\log(a/b) = 2\{(a-b)/(a+b) + (a-b)^3/3(a+b)^3 + \dots\},$$

so erhält man angenähert, wenn man noch $c/s = k$ setzt

$$(4) \quad q = k \cdot \frac{1}{t} \frac{\Theta_1 \Theta_2 + \Theta_2^2}{\Theta_1 + \Theta_3}.$$

Das hierbei vernachlässigte Glied kann nur in besonderen Fällen 0,75–1 Proc. betragen und ist, ceteris paribus, d. h. bei gleicher Beobachtungszeit viermal kleiner, als das Correctionsglied in (1). Da es sich beim Actinometer nur um relative Messungen der Radiation handelt, so kann als Maass derselben die Grösse

$$(5) \quad \Omega = \frac{1}{t} \frac{\Theta_1 \Theta_2 + \Theta_2^2}{\Theta_1 + \Theta_3}$$

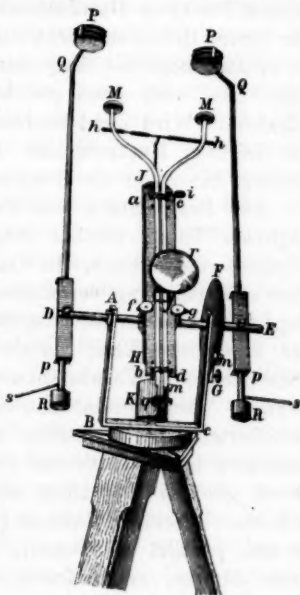
angenommen werden. Um dieses Maass zu erhalten, muss also die T.-D. unserer beiden Körper für drei äquidistante Zeitmomente bestimmt werden. Da es sich um die Construction eines transportablen Actinometers handelt, so musste von der Messung einer T.-D. auf thermoelectrischem Wege Abstand

genommen werden. Die Anwendung eines Differentialthermometers erschien aus verschiedenen Gründen als nicht opportun. Es wurden daher für die beiden Körper, die sich abwechselnd im Schatten abkühlen und in der Sonne erwärmen und deren T.-D. gemessen wird, die nach oben gerichteten Reservoirs zweier Quecksilberthermometer genommen. Da die Messung von einem Beobachter ausgeführt werden muss und ein gleichzeitiges Ablesen beider Thermometer behufs Bestimmung der im gegebenen Augenblick vorhandenen T.-D. unmöglich ist, so wurde eine, wohl neue Methode versucht, um diese T.-D. zu messen, eine Methode, die sich gut bewährt hat. Dieselbe besteht in Folgendem.

Denken wir uns die Scalen der beiden Thermometer parallel, möglichst nahe bei einander gelegen und zwar in der Richtung der Sonnenstrahlen, da die Reservoirs gegen die Sonne hin gerichtet sein müssen. Die Thermometer können durch Drehung je eines Schraubenkopfes in der Richtung ihrer Länge an einander vorbei verschoben werden. Senkrecht zu den Scalen der Thermometer und möglichst nahe an denselben ist ein horizontaler feiner schwarzer Draht an einen Rahmen unbeweglich befestigt. Durch eine grosse Lupe übersieht man gleichzeitig den Draht und die Enden der beiden Quecksilberfäden. Während der Beobachtung sinkt das Ende des Quecksilberfadens bei dem bestrahlten, steigt das Ende bei dem beschatteten Thermometer. Wir verschieben nun beide Thermometer nach entgegengesetzten Richtungen so, dass die Enden der beiden Quecksilberfäden beständig dicht an dem Draht bleiben. In dem gegebenen Moment, für welchen die T.-D. bestimmt werden soll, hören wir mit dem Verschieben der Thermometer auf und lesen dann in aller Ruhe an dem Draht die beiden Temperaturen ab; auf diese Weise erhalten wir die gesuchte Differenz.

Das auf der Anwendung der Formel (5) beruhende Actinometer ist auf der folgenden Seite abgebildet. Auf einen Dreifuss ist ein zweimal unter rechtem Winkel gebogener Messingstreifen ($AB = 20$ cm, $BC = 18$ cm) vermittle einer centralen Schraube befestigt, so dass bei Lösen dieser Schraube eine Drehung des Instrumentes um die Verticale möglich wird. Durch die verticalen Arme des Streifens geht die Axe DE , auf welcher

die Kreisscheibe P' festsetzt; diese Axe kann um sich selbst gedreht und vermittels der Klemme G in beliebiger Stellung fixirt werden. Auf diese Weise und durch gleichzeitige Drehung des Apparates um die Verticale wird derselbe gegen die Sonnenstrahlen so orientirt, dass der Schatten der kleinen Scheibe i auf eine ebensolche, in g theilweise sichtbare Scheibe fällt. Zwei Anschläge, von denen der eine in n sichtbar ist, begrenzen die Drehung der Axe DE bei zwei Stellungen, bei welchen der Theil $acbd$ in verticaler und horizontaler Lage sich befindet. Auf die Mitte der Axe DE ist vermittels Ring und Schraube die Messingplatte IH (36 cm lang und 52 mm breit) befestigt. Parallel zu IH liegen die Messingstreifen ab und cd , welche an den äusseren Rändern mit einer Zahnführung versehen sind und vermittels der zu kleinen Zahnrädern gehörigen Schraubenköpfe f und g in ihrer eigenen Längsrichtung nach oben oder nach unten verschoben werden können. Auf diesen Streifen sind zwei Thermometer befestigt, deren Reservoirs sich in MM befinden, während die Scalen, in der Entfernung von etwa 3,5 mm, einander parallel liegen.



Die unteren Enden sieht man bei m . Dreht man beide Schraubenköpfe f und g nach derselben Seite, so wird das eine Thermometer nach oben, das andere nach unten verschoben. Der Querstab hh dient als Stütze für die Thermometer. K ist ein etwas seitwärts angebrachtes Gegengewicht. PP sind dreifache Aluminiumschirme; QR Stäbe (70,5 cm lang), welche vermittels kleiner Querstäbe s um ihre eigenen Axen gedreht werden können, wobei je zwei bei p befindliche Anschläge die Drehung begrenzen. Bei der in

der Zeichnung angegebenen Lage befindet sich das rechte Reservoir *M* im Schatten, das linke in der Sonne.

Die Theile *MM*, deren Centra 18 cm von einander entfernt sind, haben folgende Einrichtung. Die Quecksilberreservoirs sind flache Spiralen, welche zuerst versilbert und dann galvanoplastisch schwach verkupfert sind. Jede Spirale befindet sich innerhalb eines dünnwandigen, aus zwei nebeneinander geschraubten Hälften bestehenden Kupfergefäßes, von 35 mm äusserem Durchmesser und fast 7 mm Dicke. Soweit der innere Hohlraum nicht von der Spirale eingenommen wird, ist er mit möglichst festgestampfter feinsten Kupferbronze gefüllt. Die nach oben gerichteten ebenen Flächen sind geschwärzt. Wird nicht beobachtet, so werden die Theile *MM* mit leichten Kupferdeckeln bedeckt, welche sich auf drei äusserst kleine, in die Ränder eingelassene Stifte stützen.

Zur Beobachtung der Temperaturdifferenz dient ein beweglicher Theil, welcher längs der Thermometerscalen verschoben werden kann. In dem abgebildeten Instrumente wird diese Verschiebung vermittels einer langen Schraube, deren Kopf in *q* zu sehen ist, ausgeführt. Diese Schraube, an welche der bewegliche Theil vermittels einer Mutter befestigt ist, dreht sich ohne Vorwärtsbewegung in ihren Lagern. Der bewegliche Theil besteht aus einem 3 mm breiten, länglichen, versilberten Messingstreifen, welcher sich zwischen den Thermometern befindet und auf dessen Oberfläche ein horizontaler Strich gezogen ist. Dicht über den Thermometern befindet sich ein viereckiger Rahmen (senkrecht zu den Thermometern 30 mm, parallel — 20 mm), welcher an seiner unteren Seite einen dünnen, geschwärzten Neusilberdraht trägt. Ein den Rahmen von drei Seiten umgebendes schwarzes Blech verhindert die directe Bestrahlung des Fadens und der beiden Quecksilbersäulen, welche Letzteren tiefschwarz auf hellem Grunde erscheinen müssen. Zwei gebogene Drähte, von denen der untere auf der Zeichnung gut sichtbar ist, tragen die Lupe *r* (Diameter 74 mm, Entfernung von den Thermometern 9 cm). Beobachtet man mit dem rechten Auge, so muss das linke Drittel der Lupe mit schwarzem Papier bedeckt werden. Durch die Lupe erblickt man die beiden Scalen nebeneinander (in 0°, 1 getheilt und jeder ganze Grad mit der entsprechenden

Zahl bezeichnet) den horizontalen Draht und den Strich auf dem versilberten Streifen. Man hat das Auge so zu placiren, dass der Draht den Strich bedeckt.

In einem später gebauten Exemplar fehlt die Schraube und der bewegliche Theil wird mit den Händen längs zweier Führungsdrähte verschoben.

Beobachtungsmethode. Ist das Instrument aufgestellt und justirt und der bewegliche Theil an diejenige Stelle gebracht, wo sich, entsprechend der augenblicklichen Lufttemperatur, die Enden der Quecksilberfäden befinden, so wird zuerst das eine Thermometer durch Drehen des betreffenden Schirmes „vorgewärmt.“ Diese Vorwärmung kann bei sehr starker Radiation 3° — 4° betragen. Man lernt es sehr schnell, diese Vorwärmung so zu wählen, dass 1,5 Min. nach Umlegung der Schirme die Differenz der Temperaturen beider Thermometer möglichst klein werde ($0^{\circ},4$ nicht übersteige). Hat man sich bei der ersten Messung in einer neuen Beobachtungsreihe hierbei geirrt (weswegen diese Messung nicht zu verwerfen ist, s. weiter unten), so sieht man aus den erhaltenen Zahlen sofort, ob man die Vorwärmung zu vergrößern oder zu verringern hat. Durch Drehen der Köpfe *f* und *g* bringt man das Hg-Ende beim beschatteten Thermometer an den Draht und verschiebt das bestrahlte Thermometer um so viele Grade nach oben, als die Vorwärmung betragen soll. Man hat dann nur zu warten, bis das Hg-Ende desselben den Draht erreicht. Benutzt man einen Secundenzähler (mit Zifferblatt) so legt man bei einer halben oder ganzen Minute die beiden Schirme um und folgt nun mit beiden Thermometern ungefähr der Bewegung der Hg-Enden, welche in der Nähe des Drahtes bleiben müssen. Die richtige Stellung des Auges wird leicht festgehalten, da der Blick beständig von dem einen Thermometer zu dem anderen, also über den oben erwähnten Strich weg, gleitet. Beide Schraubenköpfe *f* und *g* werden während der Beobachtung in derselben Richtung gedreht und zwar stets nach der Seite des bestrahlten Thermometers.

Die erste Messung macht man 0,5 Min. nach Umlegen der Schirme. Zehn Secunden vor dem Termin beginnt man die Secunden zu zählen und folgt nun mit beiden Thermometern genau den Bewegungen der Hg-Enden, welche sich

nicht von dem Drahte entfernen dürfen. Bei der zehnten Secunde unterbricht man die Drehung der Schraubenköpfe und liest sofort an dem Draht die Temperatur des linken Thermometers ab; man schreibt sie auf und liest dann ebenso die des rechten ab, wobei man aber nicht vergessen darf, das Auge richtig zu placiren. Man hat noch vollauf Zeit die Thermometer roh einzustellen und die 20. Secunde der zweiten halben Minute abzuwarten, von welcher angefangen man wiederum die Secunden zählt, und bis zur zehnten gezählten Secunde genau mit den Thermometern folgt. Am Ende der zehnten Secunde hört man mit dem Drehen von *f* und *g* auf, macht zwei Ablesungen u. s. w.

Man macht fünf Paar Ablesungen, so dass die ganze Messung, von dem Moment, wo die Schirme umgedreht wurden, 2,5 Minuten dauert. Bei den dritten Ablesen der Temperaturen müssen dieselben möglichst gleich sein. Sollte dies erst bei der vierten Ablesung geschehen (zu grosse Vorwärmung), so macht man eine sechste Ablesung und verwirft die erste; sollte es aber bereits bei der zweiten Ablesung geschehen (zu geringe Vorwärmung), so begnügt man sich für diesmal mit drei Paar Ablesungen.

Hat man fünf Ablesungen angeschrieben, so ist eine Messung beendet und man kann sofort zur zweiten schreiten. Da das bestrahlte Thermometer am Ende der Messung bereits das wärmere ist, so hat man nur wenig zu warten, bis man wiederum die Schirme umwechseln und die nächste Messung beginnen kann.

Bei Windstille oder bei gleichmässigem Winde ist die Bewegung der beiden *Hg*-Enden eine sehr regelmässige. Bei plötzlichen Windstössen, die man zugleich fühlt, hat man, falls z. B. *f* und *g* gerade nach rechts gedreht werden, die Drehung des rechts befindlichen Schraubenkopfes zu verlangsamen, die des links befindlichen zu beschleunigen. Obwohl die Theorie zeigt, dass Aenderungen der Windstärke einen geringen Einfluss auf die Beobachtungsergebnisse haben müssen, so ist es doch rathsam, das Actinometer an einer vor dem Winde einigermassen geschützten Stelle aufzustellen, da die Beobachtungen bei starkem Winde jedenfalls weniger sicher sind.

Es hat sich herausgestellt, dass das Beobachten mit dem

neuen Actinometer sehr leicht zu erlernen ist. Personen, die mit der Benutzung physikalischer Instrumente vertraut sind, konnten nach einigen Vorversuchen tadellose Messungen ausführen und ich glaube, dass selbst sehr wenig geübte Beobachter (also etwa Privatpersonen, die einem Netz meteorologischer Stationen Beobachtungsergebnisse einsenden) in wenig Tagen die Messungsmethode beherrschen lernen.

Statt eines Secundenzählers kann auch ein billiges gewöhnliches Metronom angewandt werden, welches nach je zehn Secunden einen Glockenton erklingen lässt. Man hat hierbei den Vortheil bei jeder beliebigen zehnten Secunde durch Umlegen der Schirme eine neue Messung beginnen zu können, ohne den Beginn einer ganzen oder halben Minute abwarten zu müssen. Nach Umlegen der Schirme lässt man einen Glockenton vorbei und beim nächsten beginnt man das Zählen der Secunden und das genaue Einstellen der Quecksilberenden.

Die fünf Ablesungen geben ebensoviel Temperaturdifferenzen, die zeitlich je $\frac{1}{2}$ Minute von einander entfernten Momenten entsprechen; die ersten zwei müssen hierbei das eine, die letzten zwei, das entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Die fünf Temperaturdifferenzen geben zwei, von einander so gut wie völlig unabhängige Werthe der Radiation: den einen Werth erhält man aus der ersten, dritten und fünften, den zweiten aus der zweiten, dritten und vierten Temperaturdifferenzen. Die dritte wird allerdings bei beiden Berechnungen benutzt, doch ist ihr Einfluss auf das Resultat stets ein nur sehr geringer. Wir bezeichnen die beobachteten Temperaturdifferenzen folgendermassen:

1.	2.	3.	4.	5.
θ_1		θ_2		$-\theta_3$
	ϑ_1	ϑ_2	$-\vartheta_3$	

Alle θ und ϑ , ausser $\theta_2 = \vartheta_2$ sind positive Grössen. Die Formel (5) giebt uns zwei relative Werthe Ω_1 und Ω_2 für die Radiation: den ersten erhält man aus den θ , wobei $t = 1$ Min. ist; den zweiten aus den ϑ , wobei $t = 0,5$ Min. Es ist somit

$$(6) \quad \begin{cases} \Omega_1 = \frac{\theta_1 \theta_3 + \theta_2^2}{\theta_1 + \theta_3} \\ \Omega_2 = 2 \frac{\vartheta_1 \vartheta_3 + \vartheta_2^2}{\vartheta_1 + \vartheta_3} \end{cases}$$

Theoretisch müsste, wenn man von dem oben erwähnten Correctionsglied zur Formel (5) absieht, $\Omega_1 = \Omega_2$ sein.

Zahlreiche Beobachtungen zeigten, dass die Werthe von Ω_1 und Ω_2 vorzüglich übereinstimmen. Ich führe ein Beispiel an:

21,12°	23,24°	$\theta_1 = 2,12^\circ$	
21,86°	22,60°		$\vartheta_1 = 0,94^\circ$
22,46°	22,30°	$\theta_2 = 0,16^\circ$	$\vartheta_2 = 0,16^\circ$
22,97°	21,88°		$\vartheta_3 = 1,09^\circ$
23,68°	21,70°	$\theta_3 = 1,98^\circ$	

In den ersten 2 Columnen stehen die direct abgelesenen (am Draht) Temperaturen; das linke Thermometer war beschienen, das rechte im Schatten. Formel (6) ergiebt $\Omega_1 = 1,030$ und $\Omega_2 = 1,034$.

St. Petersburg, November 1893.

10. *Zwei Wärmeleitungsprobleme;* *von O. Chwolson.*

Actinometrische Studien führten mich zu den folgenden beiden Problemen, deren Lösung vielleicht auch sonst noch praktische Verwerthung finden dürfte.

I. Problem. Stationärer Wärmezustand eines geraden Kreiscylinders, dessen eine Grundfläche bestrahlt wird. Es seien: δ die Länge des Cylinders, R der Radius des Querschnitts (der Grundflächen), q die Wärmemenge, welche von der Flächeneinheit der Grundfläche $x = 0$ in der Zeiteinheit absorbiert wird, k der Coefficient der inneren Wärmeleitung, h der Coefficient der äusseren Wärmeleitung an der bestrahlten Grundfläche; $p = q/k$; $b = h/k$; h_1 der Coefficient der äusseren Wärmeleitung an der Seitenfläche und an der nichtbestrahlten Grundfläche ($x = \delta$); $b_1 = h_1/k$. Die Temperatur des äusseren Raumes sei gleich Null. Die stationäre Temperatur V eines Punctes, der sich in der Entfernung x von der bestrahlten Grundfläche und in der Entfernung r von der Axe des Cylinders befindet, genügt der Gleichung:

$$(1) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

Die Grenzbedingungen lauten

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} p = - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{x=0} + b (V)_{x=0} \\ - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{x=\delta} = b_1 (V)_{x=\delta} \\ - \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r=R} = b_1 (V)_{r=R} \end{array} \right.$$

Der Gleichung (1) genügt

$$(3) \quad V = \sum_i \left[\alpha_i e^{-m_i x} + \beta_i e^{-m_i x} \right] T_0(m_i r),$$

wo T_0 die Bessel'sche Function vom Grade Null ist. Die dritte

Bedingung giebt, wenn man $m_i = z_i/R$ und $b_1 R = c$ setzt, die Gleichung

$$(4) \quad z_i T_1(z_i) = c T_0(z_i),$$

wo T_1 die Bessel'sche Function vom Grade eins ist. Für einen Metallcylinder von nicht exorbitanter Dicke ist c ein kleiner Bruch; wir nehmen die Grammkalorie, das Centimeter und die Minute als Einheiten. Ein Kupfercylinder (h_1 etwa 0,03, h etwa 30, also $b_1 = 0,001$) müsste eine Dicke von 2 dm haben ($R = 10$), damit $c = 0,01$ würde.

Ich habe die Wurzeln der Gleichung (4) vor längerer Zeit in einer anderen Arbeit¹⁾ untersucht und gezeigt, dass für die erste Wurzel ein sehr angenäherter Werth vermittelt der Formel

$$(5) \quad z_1 = \sqrt{\frac{8c}{4+c}}.$$

gefunden werden kann; der zugehörige Werth $T_0(z_1)$ ist gleich $16/(4+c)^2$. Die ferneren Wurzeln der Gleichung (4) sind bei Metallcylindern in sehr geringer Abhängigkeit von c und zwar kann man setzen²⁾ $z_2 = 3,832$, $z_3 = 7,016$, $z_4 = 10,174$, $z_5 = 13,324$, $z_6 = 16,471$, $z_7 = 19,616$. Für $c = 0,01$ ist $z_1 = 0,141245$.

Die zweite der Gleichungen (2) giebt für die α_i und β_i die Bedingung

$$(6) \quad (b_1 - m_i) e^{-m_i \delta} \alpha_i + (b_1 + m_i) e^{-m_i \delta} \beta_i = 0.$$

Um die erste der Gleichungen (2) zu benutzen, muss man die Constante p in eine Reihe nach den $T_0(m_i r)$ zerlegen, was sich nach bekannten Methoden³⁾ leicht ausführen lässt. Man erhält so die zweite Bedingung:

$$(7) \quad (b + m_i) \alpha_i + (b - m_i) \beta_i = \frac{2cp}{R^2(m_i^2 + b_1^2) T_0(m_i R)}$$

Werden α_i und β_i aus (6) und (7) bestimmt und in (3) eingesetzt, so erhält man für V endgültig

$$(8) \quad V = \frac{2cp}{R^2} \sum_i \frac{F_i(x) T_0(m_i r)}{M_i},$$

wo

1) O. Chwolson, Mémoires de l'Acad. Imp. des Sc. de St. Petersb. (7) 37. Nr. 12. Cap. III. p. 21–25.

2) l. c. p. 22.

3) l. c. Formeln (53), (56) und (67).

$$(9) \quad F_i(x) = (m_i + b_1) e^{m_i(\delta - x)} + (m_i - b_1) e^{-m_i(\delta - x)}$$

und

$$(10) \quad \begin{cases} M_i = (b_1^2 + m_i^2) T_0(m_i R) \left\{ (m_i + b)(m_i + b_1) e^{m_i \delta} - \right. \\ \left. - (m_i - b)(m_i - b_1) e^{-m_i \delta} \right\}. \end{cases}$$

Für den *allgemeineren Fall*, dass die nicht bestrahlte Grundfläche eine andere äussere Wärmeleitung (h_2) besitzt, als die Seitenfläche (h_1), würde sich V nur wenig ändern. Statt b_1 würde $b_2 = h_2/k$ stehen: erstens in $F_i(x)$, zweitens innerhalb der grossen Klammern in M_i ; b_1 würde verbleiben im ersten Factor von M_i und im Factor $c = b_1 R$.

Für eine unendliche bestrahlte Platte ($R = \infty$) von der Dicke δ lässt sich V als lineare Function von x sehr leicht bestimmen und zwar ist

$$(11) \quad V = p \frac{1 + b_1(\delta - x)}{b + b_1 + b b_1 \delta}.$$

In der That geht (8) für $R = \infty$ in (9) über.

Für Metallcylinder wird m_2 stets gross sein gegen m_1 , da, wie wir oben sahen, z_2 gross ist gegen z_1 . Infolgedessen sind in (8) alle Glieder (die Vorzeichen derselben wechseln) verschwindend klein gegen das erste. Wir können also

$$(12) \quad V = \frac{2cp F_1(x) T_0(m_1 r)}{R^2 M_1}$$

setzen, wo $F_1(x)$ und M_1 aus (9) und (10) gefunden werden. Wir haben in diesem Falle nur die eine Wurzel $z_1 = m_1 R$ mit Hülfe von (5) zu berechnen; der Werth von $T_0(m_1 R) = T_0(z_1)$ ist oben ebenfalls angegeben.

II. *Problem. Variabler Wärmezustand eines unendlich langen Drahtes, der an einen Körper M gelöthet ist, dessen Temperatur V_0 eine gegebene Function $f(t)$ der Zeit ist, wobei $f(0) = 0$ sein soll.* Es sei ρ der Radius des Drahtes, α der Coefficient der inneren, h der der äusseren Wärmeleitung, β die Dichte, γ die specifische Wärme des Drahtes; V die Temperatur in einem Querschnitt des Drahtes, der sich in der Entfernung x vom Körper M befindet; $Q dt$ die Wärmemenge, die in der Zeit dt aus dem Körper M in den Draht fliesst, also Q die Intensität des übergelhenden Wärmestromes. Setzen wir $a^2 = \alpha/\beta\gamma$ und $b = 2h/\rho\beta\gamma$, so muss V der Gleichung

$$(13) \quad \frac{\partial V}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - bV$$

genügen.¹⁾ Die Grenzbedingungen lauten

$$(14) \quad (V)_{t=0} = 0 \quad (V)_{x=0} = V_0 = f(t).$$

Ferner ist

$$(14) \quad Q = -\pi \varrho^2 x \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{x=0}.$$

Setzen wir mit Poisson $V = Ue^{-b \cdot t}$, so erhalten wir für U Gleichungen, deren Lösung Riemann²⁾ gegeben hat. Für V finden wir den Ausdruck

$$(16) \quad V = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} f\left(t - \frac{x^2}{4a^2\gamma^2}\right) e^{-\frac{bx^2}{4a^2\gamma^2} - \gamma^2} d\gamma.$$

Führen wir die neue Variable $\lambda = x/2a\gamma$ ein und beachten wir, dass $f(0) = 0$ ist, so wird

$$(17) \quad \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{x=0} = -\frac{2}{a\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-b\lambda^2} \{bf(t - \lambda^2) + f'(t - \lambda^2)\} d\lambda.$$

Diese Formel gibt für jede Function $f(t)$ mit Hülfe der Formel (15) die Intensität Q des aus dem Körper in den Draht übergehenden Wärmestromes.

Bezeichnen wir mit H die fictive äussere Wärmeleitung, durch welche die Anwesenheit des Drahtes ersetzt gedacht werden kann, so ist $Q = \pi \varrho^2 V_0 H$ und folglich

$$(18) \quad H = -\frac{x}{V_0} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{x=0}.$$

Bei der Ausrechnung von (17) wird man wohl meist auf das Kramp'sche Integral stossen. Setzen wir

$$(19) \quad \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^k e^{-\lambda^2} d\lambda = \omega(k).$$

1) Poisson, *Théorie mathématique de la chaleur*. Paris 1835. p. 264, Formel (19).

2) Riemann, *Partielle Differentialgleichungen*. p. 131. Braunschweig 1869.

Die ausführlichste Tabelle dieses Integrals ist von A. Markoff¹⁾ berechnet. Am Ende der unten citirten Schrift sind die Werthe von $\omega(k)$ angegeben (p. 91—98).

Es sei beispielsweise

$$(20) \quad V_0 = f(t) = A(1 - e^{-mt}).$$

Aus (17) erhält man

$$(21) \quad \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{x=0} = -A \sqrt{\frac{2h}{\pi x}} \left\{ \omega(\sqrt{bt}) - \sqrt{1 - \frac{m}{b}} e^{-mt} \omega(\sqrt{(b-m)t}) \right\}.$$

(15) und (18) ergeben dann Q und H , wenn man für V_0 noch (20) einsetzt.

Der Draht sei aus Kupfer und 1 mm dick; es ist

$\rho = 0,05$, $\alpha = 30$, $h = 0,03$, $\beta = 8,9$, $\gamma = 0,094$,
also $b = 1,44$; es sei ferner $m = 0,3$ (die Einheiten sind Gramm-calorie, Centimeter, Minute). Der Ausdruck in den Klammern in (21) wird

$$\omega(1,2\sqrt{t}) - 0,886 e^{-0,3t} \omega(1,063\sqrt{t})$$

und lässt sich leicht für jedes t mit Hülfe der oben erwähnten Tafeln berechnen. Es ist

$t = \frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	1	2	3	4	∞ Min.
$\frac{H}{h} = 804$	346	298	264	228	216	210	200.

St. Petersburg, November 1893.

1) A. Markoff, Table des Valeurs de l'Integrale $\int_k^\infty e^{-t^2} dt$. St. Petersburg 1888.

**11. Ueber das Zurückbleiben des stark
gedämpften Magneten bei variabler Stromstärke;
von O. Chwolson.**

Es kommt vor, dass man den Variationen einer Stromstärke mittelst eines Galvanometers zu folgen hat; gehen diese Variationen nicht übermässig langsam vor sich und wechseln sie mehr oder weniger häufig ihre Richtung, so muss ein hoher Grad von Dämpfung angewandt werden. Es ist klar, dass in diesem Falle die augenblickliche Lage des sich bewegenden Magneten nicht mit der Ruhelage zusammenfällt, welche der Magnet, entsprechend der Stromstärke in diesem Moment, einnehmen würde und zwar, dass der Magnet in seiner Bewegung beständig sozusagen hinter der Stromstärke zurückbleiben wird. Die directe Ablesung gibt also bei wachsender Stromstärke zu kleine, bei sinkender zu grosse Werthe. Einen solchen Fall haben wir vor uns, wenn wir auf thermoelectrischem Wege den Temperaturänderungen eines Körpers folgen wollen, z. B. denjenigen eines Körpers, welcher den Sonnenstrahlen ausgesetzt ist, wie dies mehreren, theils neueren, theils älteren actinometrischen Messmethoden zu Grunde liegt. Als specielles Beispiel wollen wir im Weiteren den Fall ins Auge fassen, wo die electromotorische Kraft E als Function der Zeit t von der Form

$$(1) \quad \begin{cases} E = A(1 - e^{-mt}) \\ m = 0,35 \end{cases}$$

ist. Der Specialwerth $m = 0,35$ ist der actinometrischen Praxis entnommen und soll nur dazu dienen ein Zahlenbeispiel anführen zu können; t soll in *Minuten* ausgedrückt sein.

Die Coefficienten der Bewegungsgleichung. Um für die Grösse des Zurückbleibens absolute Zahlenwerthe ausrechnen zu können, müssen die Coefficienten in der Differentialgleichung der Bewegung des gedämpften Magneten bekannt sein. Das von mir benutzte Wiedemann'sche Galvanometer, von Edelmann construirt, enthält einen kleinen Glockenmagnet in

kugelförmigem Dämpfer, die Bewegung desselben scheint aperiodisch zu sein, sodass in der Gleichung

$$(2) \quad \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2 \alpha \frac{d\varphi}{dt} + \beta^2 \varphi = 0$$

$\alpha > \beta$ zu erwarten ist. Wäre $\alpha < \beta$, so würde das logarithmische Decrement

$$(3) \quad \lambda = \frac{\alpha \pi}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}$$

sein. Um β zu bestimmen wurde der Dämpfer entfernt und vermittels eines Tissot'schen Taschenchronometers die Schwingungszeit T des Glockenmagneten (bei geöffnetem Galvanometerdraht) bestimmt und $T = 2,75$ Sec. gefunden. Hieraus $\beta = \pi / T = 1,142 \text{ (sec)}^{-1}$, oder, da wir die Minute als Zeiteinheit annehmen

$$\beta = 68,54 \text{ (min)}^{-1}.$$

Bekanntlich ist β^2 proportional der Horizontalintensität h an der Stelle, wo sich der Glockenmagnet befindet. Es wurde nun ein Hilfsmagnet horizontal in verschiedenen Entfernungen von dem Galvanometer so hingelegt, dass seine Axe parallel zum magnetischen Meridian war, die Verbindungslinie der beiden Magnete aber senkrecht zu diesem Meridian lag. Der Nordpol des Hilfsmagneten war nach Süden gerichtet und die Lage so fixirt, dass keine Ablenkung des Glockenmagneten stattfand. Die Intensität h erhält auf diese Weise einen grösseren Werth h_i und ebenso β einen grösseren Werth β_i . Die h_i sind umgekehrt proportional den Ablenkungswinkeln φ_i , welche bei der entsprechenden Lage des Hilfsmagneten durch eine constante electromotorische Kraft hervorgerufen werden; als Quelle diente hierbei ein Thermolement Kupferneusilber. Entsprechend (3) erhält man bei jeder Lage des Hilfsmagneten ein logarithmisches Decrement

$$\lambda_i = \frac{\alpha \pi}{\sqrt{\beta_i^2 - \alpha^2}}.$$

Wir haben nun die zwei Gleichungen

$$\frac{\beta_i}{\beta} = \sqrt{\frac{\varphi}{\varphi_i}}; \quad \frac{\alpha}{\beta_i} = \frac{\lambda_i}{\sqrt{\pi^2 + \lambda_i^2}}$$

und hieraus

$$(4) \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i^2 + \pi^2}} \sqrt{\frac{\varphi}{\varphi_i}}.$$

Die Beobachtungen ergaben (Pawlowsk, 18. August 1892).

			$\sqrt{\frac{\varphi}{\varphi_i}}$	λ_i	$\frac{\alpha}{\beta}$
I	9 ^h 8 ^m	$\varphi = 40,02$	1	—	—
II	9 ^h 32 ^m	$\varphi_1 = 35,28$	1,0650	6,24	0,952
III	9 ^h 40 ^m	$\varphi_2 = 31,74$	1,1228	5,08	0,956
IV	9 ^h 55 ^m	$\varphi_3 = 24,97$	1,2660	3,62	0,956
V	10 ^h 10 ^m	$\varphi_4 = 13,71$	1,7084	2,125	0,957
VI	10 ^h 20 ^m	$\varphi = 40,06$	1	—	—

Die Versuche I und VI entsprechen der Abwesenheit des Hilfsmagneten; bei den Versuchen II bis V wurde derselbe successive dem Galvanometer genähert. Da der Werth II von λ_i sehr unsicher ist, nehmen wir $\alpha/\beta = 0,956$, also aus (4)

$$(5) \quad \alpha = 65,53 (\text{min})^{-1}.$$

Die gesuchte Bewegungsgleichung lautet also

$$(6) \quad \frac{q}{d} \frac{d^2}{dt^2} + 131,06 \frac{d\varphi}{dt} + 4698 \varphi = 0.$$

Wider Erwarten ist $\alpha < \beta$, die Bewegung also *nicht* aperiodisch. Aus (3) finden wir $\lambda = 10,24$; eine anfängliche Ablenkung von 500 Scalentheilen würde einen für die Beobachtung unmerklichen Ausschlag von $1/50$ Scalentheilen nach der anderen Seite ergeben. Die Schwingungszeit wird durch den Dämpfer von 2,75 sec bis auf $t = \pi/\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} = 9,4$ sec erhöht.

Das Zurückbleiben des Magneten. Bei variabler electromotorischer Kraft findet ein Zurückbleiben der Stromstärke statt; bei dem von mir benutzten Galvanometer war dies Zurückbleiben aber zu vernachlässigen, da der Widerstand W des Stromkreises 1,2 Ohm, der Coefficient der Selbstinduction P aber nur 0,008 Quadrant betrug. Das Zurückbleiben der Stromstärke J ist nun aber gleich $P/W(dJ/dt)$, wo hier $P/W = 0,00011$ min. Bewegt sich der Magnet mit einer Geschwindigkeit von 200 Scalentheilen in der Minute, so entspricht das Zurückbleiben der Stromstärke nur 0,022 Scalentheilen. Wir können also die Stromstärke proportional der electromotorischen Kraft annehmen.

Einen wohl für alle Fälle genügend angenäherten Werth für das Zurückbleiben des gedämpften Magneten kann man auf folgende einfache Weise erhalten. Die Bewegungsgleichung des Magneten ist bei variabler Stromstärke von der Form

$$(7) \quad \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2\alpha \frac{d\varphi}{dt} + \beta^2 \varphi = F(t).$$

Die der augenblicklichen Stromstärke entsprechende Ablenkung Φ ist gleich $F(t)/\beta^2$. Hieraus

$$\varphi = \Phi - \frac{2\alpha}{\beta^2} \frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{\beta^2} \frac{d^2 \varphi}{dt^2}.$$

Vernachlässigt man das letzte Glied, so erhält man für das Zurückbleiben $\varphi - \Phi$ den Werth

$$(8) \quad \varphi - \Phi = - \frac{2\alpha}{\beta^2} \frac{d\varphi}{dt}.$$

(4) und (5) ergeben

$$(9) \quad \varphi - \Phi = -0,0279 \frac{d\varphi}{dt},$$

wo $d\varphi/dt$ sich auf die Minute als Zeiteinheit bezieht.

Eine genaue Integration von (7) zeigt, dass z. B. in dem Fall, dass die Variation der electromotorischen Kraft durch (1) bestimmt ist, etwa 5 Sec. nach Beginn der Bewegung das Zurückbleiben durch (9) genügend genau ausgedrückt wird; für den Coefficienten rechts erhält man 0,0281.

Die Formel (9) zeigt, dass das Zurückbleiben des gedämpften Magneten ein sehr bedeutendes sein kann. Durchläuft der Magnet z. B. 4 Scalentheile in der Secunde ($d\varphi/dt=240$), so beträgt das Zurückbleiben 6,7 Scalentheile.

St. Petersburg, November 1893.

**12. Notiz über die Methode zur Messung
von Druckdifferenzen mittels Spiegelablesung;
von W. C. Röntgen.¹⁾**

Bei seiner Arbeit über Dampfdrucke wässriger Lösungen hat Hr. Dieterici meine Methode zur Messung von geringen Druckdifferenzen angewendet. Auf p. 56 der betreffenden Abhandlung²⁾ finde ich den folgenden Satz: „Röntgen verwendete einen um eine Axe drehbaren Spiegel, gegen den ein auf die Mitte der Membran aufgesetzter Stift stiess. Bei dieser Construction liegt der Spiegel nur durch sein eigenes Gewicht auf dem stossenden Stifte auf. Diese Auflage ist nicht stets dieselbe, und daher ist es schwierig, wenn nicht bei sehr empfindlicher Uebertragung unmöglich, Nullpunktsunsicherheiten zu vermeiden.“

Wenn diese Angabe unberichtigt bliebe, könnte vielleicht die Ansicht aufkommen, dass meine seinerzeit erhaltenen Werthe von c_p/c_v von Luft und Kohlensäure von jener Unsicherheit nicht frei wären. Ich gestatte mir daher im Interesse der Sache die Bemerkung, dass die von Hrn. Dieterici geforderte und von mir schon damals als nothwendig erkannte *feste* Verbindung von Spiegel und Aneroidplatte durch ein an beiden Enden mit Wachs- und Kolophoniumkitt aufge kittetes Schilfstäbchen bei meinem Apparat vorhanden war. Dementsprechend heisst es auf p. 583 meiner Mittheilung „ihr“ (der Platte) „Centrum ist durch ein aufge kittetes Schilfstäbchen mit einem kleinen um eine Axe drehbaren Spiegelchen derart *verbunden*, dass etc.“

Dass mein ganzer Apparat überhaupt in möglichst einfacher Weise und fast vollständig ohne Hülfe eines Mechanikers hergestellt wurde, entsprach sowohl meinem Geschmack als auch den geringen mir damals zur Verfügung stehenden Mitteln. Ich glaube nicht, dass die Genauigkeit meiner Bestimmungen unter diesem Umstande gelitten hat.

Würzburg, Physik. Institut, October 1893.

1) Unliebsam verspätet.

2) Dieterici, Wied. Ann. 50. p. 47. 1893.

13. *Ein Versuch, das Spectrum des Blitzes zu photographiren; von G. Meyer.*

Der photographischen Aufnahme des Blitzspectrums vermittels eines mit einem Spalt versehenen Spectralapparates stellt sich die Schwierigkeit entgegen, dass, um einen Erfolg zu erzielen, der Blitz sich genau in der Verlängerung der optischen Axe des Apparates befinden muss. Durch die folgende Anordnung kann man sich von dieser Beschränkung frei machen. Vor dem Objectiv des auf unendlich eingestellten photographischen Apparates wird ein auf Glas getheiltes Beugungsgitter befestigt. Man erhält dann auf der Platte ein Bild des Blitzes, hervorgerufen durch die Strahlen, welche ohne Richtungsänderung das Gitter durchsetzen und an beiden Seiten desselben Bilder, welche den die Seitenspectren bildenden Strahlen ihre Entstehung verdanken; die Zahl der Bilder in jedem Seitenspectrum ist gleich der Zahl der im Blitzspectrum vorkommenden hellen Linien. Bei Gelegenheit eines im Mai dieses Jahres stattfindenden Nachtgewitters habe ich einen derartigen Versuch angestellt, zu dem eine kleine Hand-camera diente; vor dem Objectiv — einer gewöhnlichen Landschaftslinse von 10 cm Brennweite — war ein Glasgitter von 0,0256 mm Gitterbreite befestigt. In dem Apparate wurden zwei Platten exponirt. Die erste zeigt zwei Blitze und rechts und links von jedem derselben je ein Bild desselben, welches dem Seitenspectrum erster Art entspricht. Dieses enthält in unserem Falle nur eine Linie. Auf der zweiten Platte befinden sich mehr Blitze und zwar in unmittelbarer Nähe des Horizontes, über den Hausdächer mit verschiedenen Schornsteinen hervorragen. Zwischen den Schornsteinen ist nun ein starker Blitz mit seinen beiden Seitenspectren zu bemerken. Bei Tage maass ich mit Hülfe eines Prismenkreises, der eine Ablesung bis auf 10" gestattete, den Winkel zwischen den Ecken zweier Schornsteine, von dem Standpunkte des photographischen Apparates aus, zu $2^{\circ} 46' 55''$. Auf der Platte wurde dann mittels eines Kathetometers, dessen Nonius 0,02 mm zeigte, der Ab-

stand entsprechender Punkte des Blitzes und der Seitenspectren und der Abstand der mit dem Prismenkreise unvisirten Schornsteinecken gemessen. Die erste Grösse betrug 1,60 mm, die zweite 5,20 mm. Aus den mitgetheilten Daten berechnet sich der Beugungswinkel zu $0,856^\circ$ und die Wellenlänge zu $382 \cdot 10^{-6}$ mm. Die Ermittlung des Beugungswinkels ist unabhängig von der Kenntniss der Brennweite des Objectivs und einer etwaigen Verzeichnung.

Zu einer Untersuchung, welchem Körper diese Linie angehört, ist die Messung nicht genau genug; es kann aus derselben nur geschlossen werden, dass das bei der photographischen Fixirung von Blitzten hauptsächlich wirksame Licht nahezu die Wellenlänge $382 \cdot 10^{-6}$ mm besitzt. Diese Mittheilung erfolgte, um vielleicht andere Beobachter, denen grössere Apparate zur Verfügung stehen, und die häufiger Gewitter beobachten können, als es in hiesiger Gegend möglich ist, zu veranlassen, ebenfalls nach dieser Methode Versuche zu machen. Die Constatirung von weiteren ultravioletten Linien erscheint nicht ausgeschlossen, wenn es gelingt, Blitze in einigen hundert Metern Entfernung zu photographiren, denn in dem mitgetheilten Falle betrug die Entfernung des Gewitters mehr als 10 km.

Messungen der Wellenlängen von Linien des Blitzspectrums sind mit einem mit Spalt versehenen Spectralapparate von den Hrn. H. C. Vogel und Schuster gemacht. Die folgende Tabelle enthält die durch diese Untersuchungen bekannt gewordenen Wellenlängen:

Schuster	H. C. Vogel.
568,1	
559,2	
538,4	534,1
526,0	
518,2	518,4
500,2	500,2
	486,0
	467,3 bis
	458,3

Diesen ist im ultravioletten Theile des Spectrums noch eine hinzuzufügen vom ungefähren Betrage $382 \cdot 10^{-6}$.

Freiburg i. B., Phys. Inst. d. Univ., 14. Oct. 1893.